

# Analysis II

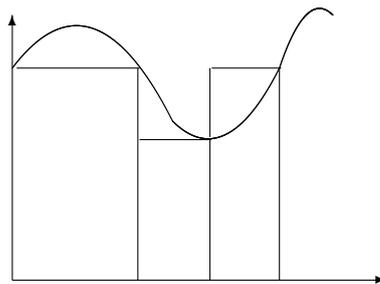
## SoSe 2017

M. Fuchs

## §12

# Integralrechnung (für Regelfunktionen)

**Motivation:** 1) Flächenberechnung



2) systematische Bestimmung von Stammfunktionen  
(finde zu  $f$  ein  $F$  mit  $\frac{dF}{dx} = f$ )

**Idee** zur Bildung eines Integralbegriffs:

- $f \equiv c$  auf  $[a, b] \implies \int_a^b f(x) dx := c \cdot (b - a)$  “Rechteck”
- $f$  stückweise konstant “Treppenfunktion”
- $f =$  Limes von Treppenfunktionen “Approximation”

Ergebnis: Integral für sog. Regelfunktionen

Nachfolgend: nur reeller Definitionsbereich, Werte in  $\mathbb{C}$  möglich.

**Definition 12.1** : Sei  $a < b$ .  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Treppenfunktion

:  $\iff$  es gibt eine Zerlegung

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

von  $[a, b]$ , so dass  $\varphi$  auf  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , konstant ist.

Gilt  $\varphi = c_i$  auf  $(x_{i-1}, x_i)$ , so setzt man:  $\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$

(Treppenfunktionen haben nur endlich viele Werte!)

**Bemerkungen:**

0) Treppenfunktionen sind offenbar i.a. unstetig. Die Werte  $\varphi(x_i)$  an den Teilpunkten spielen für  $\int_a^b \varphi dx$  keine Rolle.

1) Def. 12.1 des Integrals hängt nicht von  $Z$  ab! D.h.:

$Z, Z'$  Zerlegungen von  $[a, b]$ ,

$$Z = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}, \quad Z' = \{x'_0 < \dots < x'_m\}$$

$$\varphi = c_i \text{ auf } (x_{i-1}, x_i), \quad \varphi = d_k \text{ auf } (x'_{k-1}, x'_k)$$

$$\implies \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^m d_k (x'_k - x'_{k-1}).$$

Bspl.:  $Z = \{a, b\}, \quad Z' = \{a, x', b\}$

offenbar:  $c \cdot (b - a) = c \cdot (x' - a) + c \cdot (b - x')$

2)  $\mathcal{T}([a, b]) :=$  Menge aller Treppenfunktionen  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Übung:  $\mathcal{T}([a, b])$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Satz 12.1** : Seien  $\varphi, \Psi \in \mathcal{T}([a, b])$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Dann gilt:

$$i) \int_a^b (\alpha\varphi + \beta\Psi) dx = \alpha \cdot \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \Psi dx.$$

(Linearität)

$$ii) \left| \int_a^b \varphi dx \right| \leq \int_a^b |\varphi| \cdot dx \leq \|\varphi\| \cdot (b-a)$$

(Beschränktheit) ( $\|f\| := \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ ) lies: "Norm von  $f$ "

iii)  $\varphi, \Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(x) \leq \Psi(x)$  auf  $[a, b] \implies$

$$\int_a^b \varphi dx \leq \int_a^b \Psi dx. \quad \text{(Monotonie)}$$

**Beweis:** ii) Sei  $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  Zerlegung von  $[a, b]$ , so dass  $\varphi = c_k$  auf  $(x_{k-1}, x_k)$   $\implies$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \int_a^b |\varphi| dx. \end{aligned}$$

Da  $|c_k| \leq \|\varphi\|$  ist für  $k = 1, \dots, n$ , gilt

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \|\varphi\| \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \|\varphi\| \cdot (b-a).$$

i), iii) Sei  $Z'$  eine Zerlegung zu  $\Psi$ .  $Z^* := Z \cup Z' = \{z_0 < \dots < z_N\}$

ist dann Zerlegung sowohl zu  $\varphi$  als auch zu  $\Psi$ , also

$$\varphi = c_k \quad \text{auf } (z_{k-1}, z_k),$$

$$\Psi = d_k \quad \text{auf } (z_{k-1}, z_k) \quad \text{für gewisse } c_k, d_k \in \mathbb{C}$$

$\alpha \cdot \varphi + \beta\Psi$  ist dann  $= \alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_k$  auf  $(z_{k-1}, z_k) \implies$

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\Psi) dx = \sum_{k=1}^N (\alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_k) (z_k - z_{k-1}) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{k=1}^N c_k (z_k - z_{k-1}) + \beta \cdot \sum_{k=1}^N d_k (z_k - z_{k-1}) = \alpha \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \Psi$$

Im Fall  $\varphi \leq \Psi$  gilt  $c_k \leq d_k$  auf  $(z_{k-1}, z_k)$ , daraus folgt die Ungleichung zwischen den Integralen.  $\square$

Für welche Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  kann  $\int_a^b f dx$  sinnvoll definiert werden?

**Definition 12.2 :** Regelfunktionen

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit reellem Anfangs- und Endpunkt  $a$  bzw.  $b$ .

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Regelfunktion auf  $I$ , wenn

(i) für  $x \in (a, b)$  existieren  $f(x+)$  und  $f(x-)$

(ii)  $a \in I \implies f(a+)$  existiert

$b \in I \implies f(b-)$  existiert

**Bem.:** 1)  $R(I) =$  Menge der Regelfunktionen ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  
2) Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall wie oben, so gilt:

stetige Funktionen, BV-Fkten, monotone Fkten  $I \rightarrow \mathbb{R}$  sind Regelfunktionen

Wir beschreiben jetzt den Zusammenhang zwischen Regel- und Treppenfunktionen auf kompakten Intervallen  $[a, b]$ . Dazu benötigen wir eine äquivalente Beschreibung kompakter Mengen.

**Satz 12.2 :** Für  $M \subset \mathbb{R}$  sind gleichwertig:

(i)  $M$  sind kompakt (also beschränkt u. abgeschlossen, Satz 9.5)

(ii) Gilt  $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  mit offenen Intervallen

$U_\lambda = (x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda)$  bei beliebiger Indexmenge  $\Lambda$ , so gibt es endlich viele  $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}$

mit  $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ .

( (ii) heißt Überdeckungskompaktheit: aus einer beliebigen offenen Überdeckung kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen. )

**Beweis:** “ $\implies$ ”  $\exists R > 0$  mit  $M \subset I_o := [-R, R]$ .

Sei  $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  mit  $U_\lambda$  wie in (ii).

Annahme:  $\nexists$  endliche T.Ü.

$\implies M \cap [-R, 0]$  oder  $M \cap [0, R]$  nicht durch endlich viele  $U_\lambda$  überdeckbar;

0.E. gelte dies für  $M \cap [0, R]$ ; setze  $I_1 := [0, R]$  analog:  $M \cap \left[0, \frac{R}{2}\right]$  oder  $M \cap \left[\frac{R}{2}, R\right]$  nicht endlich überdeckbar.

rekursiv: Folge  $\{I_k\}$  abgeschlossener Intervalle,  $I_k \supset I_{k+1}$ ,  $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} |I_k|$  und

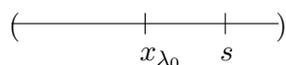
\*  $\left| \text{zur Überdeckung von } I_k \cap M \text{ braucht man } \infty \text{ viele } U_\lambda \right|$

aus \* folgt:  $\# I_k \cap M = \infty$

Sei  $s \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \implies s$  ist H.P. von  $M$

$M$  abgeschlossen, also  $s \in M$ .

Nach Voraussetzung:  $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \implies \exists \lambda_o : s \in U_{\lambda_o}$ .



für  $k \gg 1$  folgt:  $I_k \subset U_{\lambda_o} \implies I_k \cap M \subset U_{\lambda_o}$ .

Das widerspricht \*.

“ $\Leftarrow$ ” zeige (vgl. Satz 9.5): a)  $M$  beschränkt  
b)  $M$  abgeschlossen

zu a):  $\left\{ \underbrace{\left( x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)}_{=: I_{1/n}(x)} : x \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$  ist offene Überdeckung von  $M \implies$

bereits endlich viele überdecken  $M \implies M$  beschränkt

zu b): Sei  $M$  nicht abgeschlossen  $\implies \exists$  H.P.  $a$  von  $M, a \notin M$

sei  $U(x) := \left( x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x) \right), 0 < \varepsilon(x) := \frac{1}{2} |x - a|, x \in M$

$\implies M \subset \bigcup_{x \in M} U(x) \implies M \subset \bigcup_{\ell=1}^n U(x_\ell)$

mit  $x_1, \dots, x_\ell \in M$ .

Setze  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ ,  $\varepsilon_\ell = \frac{1}{2} |x_\ell - a| \implies$

$\left( a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cap U(x_\ell) = \emptyset \implies$

$\left( a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cap \bigcup_{\ell=1}^n U(x_\ell) = \emptyset \implies (M \text{ wird überdeckt})$

$\left( a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cap M = \emptyset$

Dann kann  $a$  kein Häufungspunkt von  $M$  sein. □

(allg. Beweis im  $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow$  Steffen An. I, p.578 f.)

**Satz 12.3 :** Approximationssatz Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion  $\iff$   
zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$  mit  $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$

D.h.:  $\sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Folgerung:**  $(\varepsilon = 1/n)$   $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion  $\iff$

$\exists \varphi_n \in \mathcal{T}([a, b])$  mit  $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$  bei  $n \rightarrow \infty$ .

Regelfunktionen sind genau die gleichmäßigen Limiten von Treppenfunktionen.

**Beweis:** “ $\implies$ ”  $\varepsilon > 0$  gegeben - konstruiere eine Treppenfunktion  $\varphi$  mit  $\|f - \varphi\| < \varepsilon \implies$   
(Cauchy für Grenzwerte)

zu jedem  $c \in [a, b]$  gibt es  $I_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$  mit

$$(*) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle  $x, y \in I_\delta(c)$  mit  $x, y < c$  oder  $x, y > c$ .

(ist  $c$  Randpunkt, so hat man nur eine der beiden Möglichkeiten)

$$[a, b] \text{ kompakt und } [a, b] \subset \bigcup_c I_\delta(c) \implies [a, b] \subset I_{\delta_1}(c_1) \cup \dots \cup I_{\delta_n}(c_n)$$

ordne nun  $c_1, \dots, c_n$  und die Endpunkte von  $I_{\delta_\ell}(c_\ell)$  der Größe nach  $\implies$  Zerlegung  
 $Z = \{a = x_0 < \dots < x_N = b\}$  von  $[a, b]$ .

Fixiere  $z_j \in (x_j, x_{j+1})$  beliebig und setze

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(z_j), & x \in (x_j, x_{j+1}) \\ f(x_j), & x = x_j \end{cases}, \quad x \in [a, b].$$

**Beh.:**  $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  auf  $[a, b]$ .

denn:  $x = x_j$

$x$  verschieden von allen  $x_0, \dots, x_N$ :  $\implies x \in (x_j, x_{j+1})$  für genau ein  $j$ ;

offenbar:  $(x_j, x_{j+1}) \subset U_{\delta_\ell}(c_\ell)$  für ein passendes  $\ell$

es gilt:  $\varphi(x) = f(z_j)$  mit  $z_j \in (x_j, x_{j+1})$

$\implies x$  und  $z_j$  beide links oder rechts von  $c_\ell$

$\implies_* |f(x) - f(z_j)| < \varepsilon$ , also  $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$

Es folgt:  $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$ .

“ $\longleftarrow$ ”: Sei  $c \in [a, b]$

z.Z.:  $\lim_{x \downarrow c} f(x)$  existiert

(alle anderen Fälle gehen analog!)

Cauchy Kriterium: Beh.  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  mit  
 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  für alle  
 $x, y \in (c, c + \delta)$ .

$\varepsilon > 0$  gegeben  $\implies \exists \varphi \in \mathcal{T}([a, b])$  mit  $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon/3$

$\varphi$  hat als T.F. rechtsseitigen Limes  $\alpha$ , d.h.  $\exists \delta > 0$  mit

$$|\varphi(x) - \alpha| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

bwz.  $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall x, y \in (c, c + \delta)$  nach Cauchy

$$\begin{aligned} \implies |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \end{aligned}$$

für alle  $x, y \in (c, c + \delta)$ . □

**Bem.:** Ist  $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

so folgt:  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

(beachte: aus  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  folgt  $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$ )

(Die Menge der Regelfunktionen ist abgeschlossen bzgl. glm. Kvgnz.)

**Beweis:** wähle nach 12.3  $\varphi_n \in \mathcal{T}([a, b])$  mit  $\|\varphi_n - f_n\| \leq 1/n$

Dann:  $\|f - \varphi_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - \varphi_n\| \rightarrow 0$ ,

Satz 12.3 gibt die Beh. (Übung: Einzelheiten ausführen!) □

**Definition 12.3 :** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Regelfunktion.

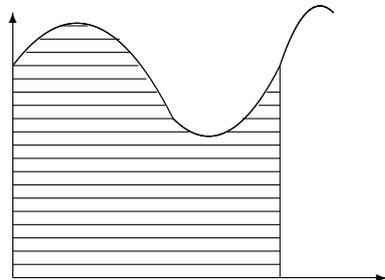
Das Integral von  $f$  über  $[a, b]$  ist erklärt als

$$\boxed{\int_a^b f \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n \, dx},$$

wobei  $\varphi_n$  irgendeine Folge in  $\mathcal{T}([a, b])$  ist mit  $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$ .

**Bem.:** (zur Schreibweise):  $\int_y^b f, \int_a^b f(x) \, dx, \int_a^b f(t) \, dt \dots$

Interpretation: “Flächeninhalt unter Graph ( $f$ )”



(Bem.: Das Riemann Integral ist allgemeiner !)

Wir müssen die Wohldefiniertheit von  $\int_a^b f dx$  zeigen:

Gelte  $\|\varphi_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \left\| \int_a^b \varphi_n dx - \int_a^b \varphi_m dx \right\| \stackrel{12.1}{=} 0$

$$\left| \int_a^b (\varphi_n - \varphi_m) dx \right| \stackrel{12.1}{\leq} \|\varphi_n - \varphi_m\| \cdot (b - a)$$

$\varepsilon > 0$  gegeben  $\implies \exists N \in \mathbb{N} : \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \leq N$

(denn  $\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|\varphi_m - f\|$ ).

Also:  $\left\{ \int_a^b \varphi_n dx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge, d.h. konvergent in  $\mathbb{C}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n dx$  hängt nicht von der Approximation ab: gilt  $\|\Psi_n - f\| \rightarrow 0$ ,

so folgt  $\|\varphi_n - \Psi_n\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|f - \Psi_n\| \rightarrow 0$  und daher

$$\left| \int_a^b \varphi_n dx - \int_a^b \Psi_n dx \right| \leq \|\varphi_n - \Psi_n\| \cdot (b - a) \rightarrow 0. \quad \square$$

**Folgerung:**

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{stetig,}$$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{monoton oder BV}$$

$$\implies \int_a^b f dx \quad \text{existiert}$$

Anmerkung:  $\int_a^b f \, dx$  ist nur für Regelfunktionen  $f$  erklärt,

also z.B. nicht für  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ .

Rechenregeln für das Integral einer T.F.  $\implies$

**Satz 12.4 :** (Eigenschaften des Integrals)  $\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$

Seien  $f, g \in \mathcal{R}([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(i) Linearität:  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \cdot \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx.$

(ii) Abschätzung:  $|\int_a^b f \, dx| \leq \int_a^b |f| \, dx \leq \|f\| \cdot (b - a).$

(iii) Monotonie:  $f, g$  reell,  $f \leq g \implies \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx.$

**Bem.:** 1)  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies |f| \in \mathcal{R}([a, b])$ , so dass  $\int_a^b |f| \, dx$  Sinn macht.

2)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Regelfunktion  $\implies f$  beschränkt,

d.h.  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty.$

( **Beweis v. 2):**  $x_n$  Folge in  $[a, b]$  mit  $|f(x_n)| \rightarrow \infty$

$[a, b]$  kompakt, also  $\exists c \in [a, b]$  mit  $x'_n \rightarrow c$  für Teilfolge (Bolzano - W.)

zeige:  $|f(x'_n)| \rightarrow \infty$  widerspricht der Existenz einseitiger Limiten in  $c$  )

**Beweis von Satz 12.4:**

Wähle

i)  $\varphi_n, \Psi_n \in \mathcal{T}([a, b]), \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0, \|\Psi_n - g\| \rightarrow 0$

$\implies \|(\alpha\varphi_n + \beta\Psi_n) - (\alpha f + \beta g)\| \rightarrow 0$  und  $\alpha\varphi_n + \beta\Psi_n \in \mathcal{T}([a, b])$

Also:  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\Psi_n) \, dx \stackrel{\text{Satz 12.1}}{=} \alpha \int_a^b \varphi_n \, dx + \beta \int_a^b \Psi_n \, dx$

$= \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx.$

$$\text{ii) } \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0 \implies \||\varphi_n| - |f|\| \rightarrow 0 \text{ und } \|\varphi_n\| \rightarrow \|f\|$$

$$\text{und } \left| \int_a^b \varphi_n dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n| dx \leq \|\varphi_n\| \cdot (b-a)$$

Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  in dieser Ungleichung ergibt Beh.

$$\left( \begin{array}{l} \text{(Anmerkung: } \left| |\varphi_n(x)| - |f(x)| \right| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| \text{ bilde sup} \\ \implies \||\varphi_n| - |f|\| \leq \|\varphi_n - f\|; \end{array} \right.$$

$$\text{außerdem: } |\varphi(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \|f\| + \|f - \varphi_n\|$$

$$\left. \begin{array}{l} \implies \|\varphi_n\| \leq \|f\| + \|f - \varphi_n\| \\ \text{und analog } \|f\| \leq \|\varphi_n\| + \|f - \varphi_n\| \end{array} \right\} \implies \|\varphi_n\| \rightarrow \|f\|$$

$$\text{(iii) } \exists \varphi_n \in \mathcal{T}([a, b]) \text{ mit } \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\underset{f \text{ reellwertig}}{\implies} \|\text{Im } \varphi_n\| \rightarrow 0, \|\text{Re } \varphi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\text{also: } \text{Re } \varphi_n \text{ reelle Treppenfkt mit } \|\text{Re } \varphi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\text{nehme also direkt an: } \varphi_n, \Psi_n \text{ reelle T.F. mit } \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0, \|\Psi_n - g\| \rightarrow 0$$

$$\text{setze } \tilde{\varphi}_n := \varphi_n - \|f - \varphi_n\| \leq f$$

$$\tilde{\Psi}_n := \Psi_n + \|g - \Psi_n\| \geq g$$

$$\implies \tilde{\varphi}_n, \tilde{\Psi}_n \in \mathcal{T}([a, b]), \|\tilde{\varphi}_n - f\| \rightarrow 0, \|\tilde{\Psi}_n - g\| \rightarrow 0,$$

$$\tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\Psi}_n, \text{ so dass } \int_a^b \tilde{\varphi}_n dx \leq \int_a^b \tilde{\Psi}_n dx$$

nun benutze Satz 12.1.

□

**Satz 12.5 :** (Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen)

Sei  $[a, c]$  kompaktes Intervall,  $a < b < c$ , und  $f \in \mathcal{R}([a, c])$   
 Dann gilt:

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx,$$

wobei rechts die Integrale der Regelfunktionen  $f|_{[a,b]}$  und  $f|_{[b,c]}$  stehen.

**Beweis:** 1)  $\varphi \in \mathcal{T}([a, c])$ .

also  $\varphi \equiv c_\ell$  auf  $(x_\ell, x_{\ell+1})$  für eine Zerlegung  $\{a = x_0 < \dots < x_n = c\}$  von  $[a, c]$ .

Sei etwa  $b \in (x_\ell, x_{\ell+1}) \implies$

$$Z' := \{a = x_0 < \dots < x_\ell < b < x_{\ell+1} < \dots < x_n\}$$

ist Zerlegung von  $[a, c]$  zusammengesetzt aus den Zerlegungen

$$\begin{aligned} \{a = x_0 < \dots < x_\ell < b\} & \text{ von } [a, b], \\ \{b < x_{\ell+1} < \dots < x_n\} & \text{ von } [b, c] \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\int_a^b \varphi dx + \int_b^c \varphi dx = \int_a^c \varphi dx$  trivial.

Ist  $b$  Teilpunkt von  $Z$ , so argumentiert man analog.

2)  $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \varphi_n \in \mathcal{T}([a, b])$  mit  $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \rightarrow 0$

analog:  $\Psi_n \in \mathcal{T}([b, c])$  mit  $\sup_{x \in [b,c]} |f(x) - \Psi_n(x)| \rightarrow 0$ .

$$\text{Setze } \lambda_n(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_n(x) & \text{auf } [a, b] \\ \Psi_n(x) & \text{auf } (b, c] \end{array} \right\} \in \mathcal{T}([a, c]).$$

Dann:  $\sup_{x \in [a,c]} |f - \lambda_n| \rightarrow 0 \implies$  Beh. mit 1) für  $\lambda_n$

Konvention: 1)  $\int_a^a f dx = 0$

2)  $a < b, f \in \mathcal{R}((a, b]) \implies \int_b^a f dx := -\int_a^b f dx$ .

$$\text{Folgerung: } \left| \begin{array}{l} \int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx \\ \text{gilt für alle } a, b, c \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

□

Die Monotonie des Integrals kann folgendermaßen verschärft werden.

**Satz 12.6 :**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig mit  $f \geq 0$ .

Gilt an einer Stelle  $x_0 \in [a, b]$   $f(x_0) > 0$ , so folgt:  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

M.a.W.:  $f \geq 0$  stetig mit  $\int_a^b f dx = 0 \implies f = 0$ .

**Bem.:** Für Regelfunktionen gilt das natürlich nicht, denn

$$f = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad 0 \leq x < 1 \\ 1, \quad x = 1 \end{array} \right\} \text{ hat über } [0, 1] \text{ Integral } 0.$$

**Beweis:** o.E.  $x_0 \in (a, b) \implies \exists \delta > 0$  mit  $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$  auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$

Dann ist

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f(x_0), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0 \quad \text{sonst} \end{array} \right.$$

aus  $\mathcal{T}([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$  mit  $f \geq \varphi$  auf  $[a, b]$

Monotonie  $\implies \int_a^b f dx \geq \int_a^b \varphi dx = 2\delta \cdot \frac{1}{2} f(x_0) = \delta \cdot f(x_0) > 0$ . □

Berechnung von Integralen mit Riemannschen Summen:

bis jetzt:  $\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n dx$  für eine Folge  $\{\varphi_n\}$  in  $\mathcal{T}([a, b])$ , die gleichmäßig gegen  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  konvergiert.

Wie bestimmt man konkret eine solche Folge?

einfacher: finde  $\Psi_n \in \mathcal{T}([a, b])$ , so dass zwar  $\int_a^b \Psi_n dx \rightarrow \int_a^b f dx$  gilt, aber nicht unbedingt  $\|\Psi_n - f\| \rightarrow 0$ .

**Definition 12.4 :** Riemannsche Summen

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $Z := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Es seien  $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$  beliebige "Zwischenstellen". Dann heißt

$$\sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta x_k := \sum_{k=1}^n f(z_k) (x_k - x_{k-1})$$

Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$  und den Stützstellen  $z_k$ .

$\delta_Z := \max \{\Delta x_k : k = 1, \dots, n\}$  Feinheit von  $Z$ .

**Satz 12.7 :** Approximation durch Riemannsche Summen

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion. Dann findet man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  wie folgt:

Für jede Zerlegung  $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  mit Feinheit  $< \delta$  und jede Wahl von Stützstellen  $z_k$  ist

$$\left| \int_a^b f dx - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

**Bem.:**

$$\left| \begin{array}{l} Z_n \text{ Folge von Zerlegungen mit Feinheit} \rightarrow 0 \\ S_n = \text{Riemannsche Summe zu } Z_n \text{ bei beliebiger Wahl von Stützstellen} \\ \implies \int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \end{array} \right.$$

**Beweis:**

a)  $f \in \mathcal{T}([a, b])$

**Fall 1:**  $f \equiv c$  auf  $[a, b]$

trivial, da  $\int_a^b f dx = \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k$  für jede Zerlegung

$Z$  mit Feinheit  $< \delta := b - a$ .

**Fall 2:**  $f$  nicht konstant

$m := \#$  Sprungstellen von  $f$

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  setze  $\delta := \frac{\varepsilon}{4m\|f\|}$

Sei  $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  Zerlegung von  $[a, b]$  mit  $\delta_z < \delta$   
wähle Stützstellen  $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_a^b f dx &\stackrel{12.5}{=} \\ \sum_{k=1}^n \left[ f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx \right] \end{aligned}$$

Sei  $k \in \{1, \dots, n\}$  fixiert:

i)  $[x_{k-1}, x_k]$  enthält keine Sprungstelle

$$\implies f \equiv f(z_k) \text{ auf } [a, b], \text{ so dass } f(z_k) \cdot \Delta x_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx$$

ii)  $[x_{k-1}, x_k]$  enthält mindestens eine Sprungstelle: man schätzt grob ab:

$$\left| f(z_k) \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx \right| \leq 2 \cdot \|f\| \cdot \Delta x_k.$$

Da eine Sprungstelle höchstens zu zwei Intervallen  $[x_{\ell-1}, x_\ell]$ ,  $[x_{k-1}, x_k]$  gehört (nämlich dann, wenn sie gemeinsamer Randpunkt ist), gibt es höchstens  $2m$  Intervalle, für die ii) eintritt.

$$\implies \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k - \int_a^b f dx \right| \leq 2 \cdot m \cdot 2 \|f\| \cdot \delta_z < \varepsilon$$

nach Def. von  $\delta$ .

b)  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ :

Wähle  $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$  mit  $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Nach a) gibt es  $\delta > 0$  mit

$$* \quad \left| \sum_{k=1}^n \varphi(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b \varphi dx \right| < \varepsilon/3$$

für alle Zerlegungen  $Z$  mit  $\delta_z < \delta$  und beliebige Wahl von  $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Sei  $Z$  eine solche Zerlegung mit beliebiger Wahl  $z_k$  von Stützstellen  $\implies$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_a^b f dx \right| \leq \\ & \left| \int_a^b f dx - \int_a^b \varphi dx \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k - \int_a^b \varphi dx \right| \leq \\ & \|f - \varphi\| \cdot (b - a) + \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) \Delta x_k \right| \\ & + \left| \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) \Delta x_k - \int_a^b \varphi dx \right| \\ & \leq 2 \cdot \|f - \varphi\| (b - a) + \varepsilon/3 < \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Bem.:** 1) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion.

$Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  Zerlegung,  $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$  definiert eine Treppenfunktion  $\varphi$  durch

$$\varphi(x) \equiv f(z_k) \text{ auf } [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, n.$$

Es gilt:  $\int_a^b \varphi dx \rightarrow \int_a^b f dx$  bei  $\delta_z \rightarrow 0$ , aber nicht unbedingt  $\|\varphi - f\| \rightarrow 0$ .

2) Verallgemeinerung des Integralbegriffs: Riemann-Integral

$Z =$  Zerlegung von  $[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt

$$\text{Obersumme} := \sum_{k=1}^n \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \Delta x_k = O(Z)$$

$$\text{Untersumme} := \sum_{k=1}^n \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \Delta x_k = U(Z)$$

$O(Z)$  ( $U(Z)$ ) monoton fallend (wachsend), wenn  $\delta_z$  kleiner wird

$\implies \lim_{\delta_z \rightarrow 0} O(Z)$  und  $\lim_{\delta_z \rightarrow 0} U(Z)$  existieren.

Sind die Grenzwerte gleich, so nennt man  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann integrierbar

Es gilt:  $f$  Regelfunktion  $\implies f$  Riemann integrierbar

Dagegen ist  $f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin 1/x, & x \neq 0 \end{cases} \notin \mathcal{R}([0, 1])$ , aber Riemann integrierbar auf  $[0, 1]$ .

Mit Hilfe des Riemann Integrals läßt sich “das Integral” auch für Funktionen mit gewissem Oszillationsverhalten definieren.  $\square$

### Beispiele: Integralbestimmung mit Riemannschen Summen

1)  $\int_0^b x^2 dx = ? \quad (b > 0)$

wähle äquidistante Zerlegung  $x_k := \frac{k}{n} b, k = 0, \dots, n$  und setze  $z_k = x_k$

$$\begin{aligned} \text{Dann} \quad \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 b^2 \cdot \left(\frac{k}{n} b - \frac{k-1}{n} b\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot b^3 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

allgemeiner:  $m \in \mathbb{N}, b > 0 \implies \int_0^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1}$

2)  $\int_a^b \frac{1}{x} dx = ? \quad (0 < a < b)$

die Zerlegung von oben ist ungünstig, besser:

$$x_k := \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} \cdot a, k = 0, \dots, n, z_k := x_{k-1} \implies$$

$$\sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k-1}{n}} a \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) = n \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)$$

Es gilt  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^t - 1\right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \left(e^{t \ln \frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b/a$  nach L'Hospital,

also  $\left(“t = 1/n”\right): \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b/a$  .

$\square$

Die Berechnung von Integralen via Riemannscher Summen ist nur in ganz einfachen Fällen praktisch ausführbar. Allerdings kann man mit R-Summen Ungleichungen zwischen Integralen beweisen:

Notation:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion,  $p \geq 1$ . Dann heißt

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p}$$

die  $p$ -Norm von  $f$ .

**Bemerkung:**  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies |f|^p \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Man hat

Höldersche Ungleichung:  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\implies \int_a^b |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Im Spezialfall  $p = q = 2$  liest sich dies also:

$$\left| \int_a^b |f \cdot g| dx \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2 dx} \right.$$

(Cauchy-Schwarz Ungleichung für Integrale)

Zum Beweis beachte die

Hölder'sche Ungl. für Summen:

$$* \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^N |a_k| \cdot |b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^N |b_k|^q \right)^{1/q} \\ a_k, b_k \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

\* sieht man so:

für  $a, b > 0$  ist  $\ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \geq \frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b$ , da  $\ln$  konkav -

also:  $\ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \geq \ln(a^{1/p} \cdot b^{1/q}) \stackrel{\text{exp}}{\implies}$

$$** \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b,$$

was sich auch aus der allg. Ungl. zwischen arith. und geom. Mittel ergibt.

\*\* gilt auch für  $a$  oder  $b = 0$ .

$$** \implies \sum_{k=1}^N |z_k|^{1/p} |w_k|^{1/q} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^N |z_k| + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^N |w_k| \quad \text{für beliebig } z_k, w_k \in \mathbb{C}.$$

Ersetze  $z_k, w_k$  durch  $z_k / \sum |z_\ell|, w_k / \sum |w_\ell| \implies$

$$\sum_{k=1}^N |z_k|^{1/p} |w_k|^{1/q} \leq \left( \sum_{k=1}^N |z_k| \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^N |w_k| \right)^{1/q}.$$

Diese Ungleichung wendet man schließlich an auf  $z_k = |a_k|^p, w_k = |b_k|^q$ .

Seien nun  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Betrachte äquidistante Zerlegung  $Z_n$  von  $[a, b]$  mit Schrittweite  $\frac{b-a}{n} =: \Delta_n$  und beliebigen Zwischenpunkten  $\xi_k^n, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n$ . Aus \* folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k^n)| \cdot |g(\xi_k^n)| \cdot \Delta_n &\leq (\Delta_n = \Delta_n^{1/q} \cdot \Delta_n^{1/p}) \\ \left( \sum_{k=1}^n |f(\xi_k^n)|^p \Delta_n \right)^{1/p} &\left( \sum_{k=1}^n |g(\xi_k^n)|^q \Delta_n \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Das sind drei Riemannsche Summen, mit  $n \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung. □

Wir notieren noch

**Satz 12.8 :** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $p \in \mathcal{R}([a, b])$  sei  $\geq 0$ .

Dann gibt es ein  $y \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)p(x) dx = f(y) \int_a^b p(x) dx.$$

Im Spezialfall  $p \equiv 1$  hat man

$$\int_a^b f(x) dx = f(y)(b-a).$$

**Beweis:** Es gilt die Abschätzung (wegen  $p \geq 0$ )

$$\min_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x) p(x) dx \leq \max_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p(x) dx.$$

Ist  $\int_a^b p(x) dx = 0$ , so folgt  $\int_a^b f(x) p(x) dx = 0$ , so dass  $y$  beliebig gewählt werden kann. Andernfalls folgt

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \Big/ \int_a^b p(x) dx \in [\min f, \max f],$$

und das Intervall rechts kommt nach dem ZWS als  $f$ -Bild vor.  $\square$

Wie wir gesehen haben, ist die Integralberechnung mit Riemannschen Summen mühsam. Zentrales Werkzeug ist

**Satz 12.9 :** Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Man definiert  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

\*  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ . Dann gilt:

- (i)  $F$  ist Lipschitz auf  $[a, b]$ :  $|F(x) - F(y)| \leq \|f\| \cdot |x - y|$ .
- (ii)  $F$  ist in allen  $x \in (a, b)$  links- und rechtsseitig differenzierbar, in den Randpunkten nur einseitig mit  $F'_\pm(x) = f(x\pm)$ .

Ist  $f \in C^0([a, b])$ , so gilt  $F \in C^1(a, b)$  mit  $F' = f$ .

**Beweis:** Die letzte Aussage folgt aus (ii)

- (i)  $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \int_a^x f(t) dt$  existiert für alle  $x \in [a, b]$ , d.h.  $F$  ist gemäß \* wohldefiniert mit

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \|f\| \cdot |x - y|.$$

- (ii) Sei  $x < b$ . Zeige:  $F'_+(x) = f(x+)$ .

Sei  $h > 0$  mit  $x + h \leq b \implies$

$$F(x+h) - F(x) \underset{\text{s.o.}}{=} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

$$f(x+) \cdot h = \int_x^{x+h} f(x+) dt \quad (\text{Integral der konst. Fkt.})$$

$$\implies \left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x+) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x+)| dt$$

$$\varepsilon > 0 \text{ gegeben} \implies \exists \delta > 0 : |f(t) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [x, x+\delta)$$

Übung:  $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$ ,  $I \subset \{\text{Sprungstelle von } \varphi\}$

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \notin I \\ \varphi(x+), & x \in I \quad (\text{oder } \varphi(x-)) \end{cases}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

$$\implies \tilde{\varphi} \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ und } \int_{\alpha}^{\beta} \varphi dt = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{\varphi} dt$$

$$\text{Also ist } \int_x^{x+h} |f(t) - f(x+)| dt = \int_x^{x+h} \Psi(t) dt,$$

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0, & t = x \\ |f(t) - f(x+)|, & x < t \leq x+h, \end{cases}$$

$$\text{und } 0 \leq \Psi(t) < \varepsilon \quad \text{für } h \leq \delta \implies$$

$$\left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x+) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon. \quad \square$$

**Korollar:** Sei  $I$  ein offenes Intervall  $\subset \mathbb{R}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.  
Dann hat  $f$  eine Stammfunktion  $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ , z.B.

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

für irgendeine Stelle  $x_0 \in I$ .

**Notation:** unbestimmtes Integral zu  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  (stetig)

bekanntlich:  $F_1, F_2$  Stammfkten zu  $f \implies F_2 = F_1 + c$  mit  $c \in \mathbb{C}$

also: erhalte alle Stammfunktionen zu  $f$  durch Wahl einer bestimmten und Addition einer beliebigen Konstanten  $c \in \mathbb{C}$

$$\text{symbolisch :} \quad \int f(x) dx \quad := \quad \{F + c : c \in \mathbb{C}\}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \text{“das unbestimmte} & \text{fixierte Stammfkt} \\ & \text{Integral”} & \end{array}$$

oftmals auch:  $\int f(x) dx = F + c, c \in \mathbb{C}$

z.B.:

$$\int x^a \cdot dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad x > 0$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

Da sich alle Stammfunktionen nur um Konstanten unterscheiden, folgt

**Korollar** (zum Hauptsatz; Integralberechnung):

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $F : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Dann gilt für alle  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (= : F|_a^b).$$

Man berechnet also Integrale  $\int_a^b f(x) dx$  durch “Bestimmen” einer Stammfunktion zu  $F$ .

[**Warnung !** Das heißt nicht, dass man Stammfunktionen immer durch geschlossene Formeln angeben kann.]

**Bspl.:**  $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b/a, \quad 0 < a < b.$

Wir kommen zu einigen

**Integrationsregeln:** (Schema: Ableitungsregeln + Hauptsatz)

**I. Partielle Integration** (Produktintegration)  $\longleftrightarrow$  Produktregel für  $\frac{d}{dx}$

$$u, v \in C^1(I) \implies \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u'v dx$$

$$\text{bzw. } \int_a^b u \cdot v' dx = (u \cdot v)|_a^b - \int_a^b u'v dx$$

**Beweis:**  $\int_a^b u \cdot v' dx = \underbrace{\int_a^b (u \cdot v)' dx}_{=(uv)'|_a^b \text{ nach Hauptsatz}} - \int_a^b u' \cdot v dx.$

**Beispiele:** (man muss  $u, v$  passen definieren)

$$\begin{array}{cc} u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

i)  $a \neq -1$ :  $\int x^a \cdot \ln x dx = \int \ln x \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{a+1} x^{a+1} \right) dx =$

$$\ln x \cdot \frac{1}{a+1} x^{a+1} - \int \frac{d}{dx} (\ln x) \frac{1}{a+1} x^{a+1} dx =$$

$$\ln x \cdot \frac{1}{a+1} x^{a+1} - \int \frac{1}{a+1} x^a dx = x^{1+1} \left( \frac{1}{a+1} \ln x - \frac{1}{(a+1)^2} \right).$$

ii) in manchen Fällen ist im Integral gar kein Produkt, dann denkt man sich  $v' \equiv 1$ , also  $v(x) = x$ .

Seien  $-1 < \alpha < \beta < 1$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d}{dx} x dx =$$

$$\left( \sqrt{1-x^2} \cdot x \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\left( x \cdot \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Es gilt

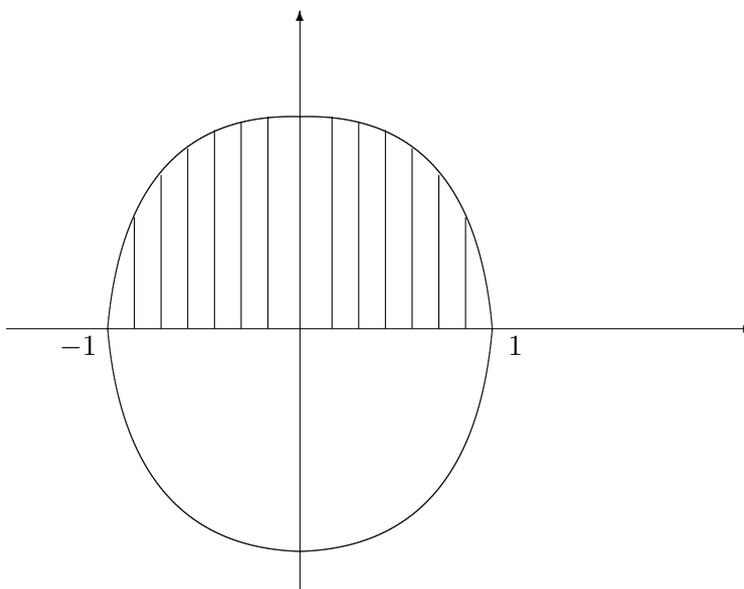
$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \arcsin x \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} dx \implies$$

$$* \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Das Ergebnis gilt gemäß Herleitung zunächst nur für  $-1 < \alpha < \beta < 1$  linke u. rechte Seite hängen stetig ab von  $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ , d.h. man darf auch die Grenzpunkte einsetzen.

Anwendung:  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  1-Kreis um 0



oberer Halbkreis = Gebiet zwischen  $x$ -Achse und dem Graphen von  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

Flächeninhalt davon =  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \implies$

$$\boxed{\text{Inhalt von } D = 2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi}$$

$\rightsquigarrow$  altbekannte geometrische Interpretation

iii) Integrale der Form  $\int x^n e^x dx$ ,  $\int x^n \cdot \cos x dx$ ,  $\int x^n \sin x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , lassen sich schrittweise berechnen:

$$I_n := \int x^n e^x dx = \int x^n \cdot \frac{d}{dx} e^x dx = x^n e^x - \int n \cdot x^{n-1} e^x dx = x^n \cdot e^x - n \cdot I_{n-1}$$

ist eine Rekursionsformel, und mit

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + C$$

folgen alle anderen Werte.

entsprechend:  $\int x^n \cdot \cos x dx = \int x^n \frac{d}{dx} \sin x dx = x^n \cdot \sin x - n \int x^{n-1} \cdot \sin x dx = x^n \cdot \sin x + n \cdot \int x^{n-1} \frac{d}{dx} \cos x dx = x^n \cdot \sin x + n x^{n-1} \cos x + n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx$ , wobei die partielle Integrationsformel zweimal angewendet worden ist

Mit  $J_n := \int x^n \cdot \cos x \, dx$  folgt also

$$J_n = n \cdot (n-1) J_{n-2} + x^n \cdot \sin x + n \cdot x^{n-1} \cos x$$

$\int x^n \cdot \sin x \, dx \rightarrow$  Übung!

iv)  $\int \sin^k x \, dx, \int \cos^k x, k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \int \sin^k x \, dx &= \int \sin^{k-1} x \cdot \sin x \, dx = - \int \sin^{k-1} x \cdot \frac{d}{dx} \cos x \, dx = \\ &= - \sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \int \sin^{k-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x \, dx = \\ &= - \sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \int \sin^{k-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= - \sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \int \sin^{k-2} x \, dx - (k-1) \int \sin^k x \, dx \implies \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \int \sin^k x \, dx = -\frac{1}{k} \sin^{k-1} x \cos x + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2} x \, dx \\ \text{analog: } \int \cos^k x \, dx = \frac{1}{k} \cos^{k-1} x \sin x + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2} x \, dx. \end{array}$$

## II. Substitutionsregel (Variablentransformation) ( $\leftrightarrow$ Kettenregel)

Seien  $f \in C^0(I, \mathbb{C}), \varphi \in C^1([a, b], \mathbb{C})$  mit  $\ast \varphi([a, b]) \subset I$

Dann ist: 
$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

**Bem.:**

- 1)  $\ast$  ist nötig, um  $f \circ \varphi$  bilden zu können.
- 2) beachte (ZWS):  $\varphi([a, b])$  ist kompaktes Intervall.
- 3) in der Praxis:  $\int_A^B f(x) \, dx = ?$   
 suche dann "geeignetes"  $\varphi: [a, b] \rightarrow [A, B], \varphi(a) = A, \varphi(b) = B$ , und benutze die Formel.  
 Es gibt kein Patentrezept für die beste Wahl von  $\varphi \rightarrow$  Erfahrung und Übung!
- 4) es gilt nicht  $\int_a^b f(\varphi(t)) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$  !  
 Dieser Fehler wird häufig gemacht.
- 5) beim unbestimmten Integral schreibt man

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \left\{ \int f(x) \, dx \right\}_\varphi$$

um anzudeuten, dass man die rechts gefundene Stammfunktion  $\int f(x) \, dx$  mit  $\varphi$  verketten muss, sonst stimmt das Ergebnis nicht.

$$\text{Beweis (Substregel): } \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \overset{\text{Kettenregel}}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \varphi) dt = \overset{\text{Hauptsatz}}{F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))} =$$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx,$$

wenn  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  ist.

**Beispiele:**

$$(i) \int_a^b f(t+c) dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx, \quad x = \varphi(t) = t+c$$

Translation

$$(ii) \int_a^b f\left(\frac{t}{c}\right) dt = c \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f\left(\frac{t}{c}\right) dt$$

$$= c \cdot \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(x) dx, \quad x = \varphi(t) = t/c, \quad c \neq 0$$

$$(iii) \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln |\varphi(t)| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

denn: für  $\varphi(t) > 0$  ist ja  $\frac{d}{dt} \ln \varphi(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t)$  nach der Kettenregel; auf Bereichen mit  $\varphi(t) < 0$  analog

$$(iv) \int \frac{dx}{x^2+2bx+c} \quad \text{mit } b, c \in \mathbb{R} \quad ?$$

$$\text{schreibe } x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + (c-b^2)$$

**Fall 1:**  $c < b^2$  (2 verschiedene reelle Nullstellen)

$$d := \sqrt{b^2 - c} \quad \text{dann} \quad \frac{1}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{(x+b)^2-d^2} = \frac{1}{2d} \left( \frac{1}{x+b-d} - \frac{1}{x+b+d} \right)$$

die Terme rechts kann man separat nach iii) integrieren  $\implies$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx = \frac{1}{2d} \left( \ln |x + b - d| - \ln |x + b + d| \right) = \frac{1}{2d} \ln \left| \frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}} \right|.$$

**Fall 2:**  $c = b^2 \implies -b$  ist doppelte Nullstelle

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x + b)^2} = -\frac{1}{x + b}$$

(unter Weglassen der Integrationskonstanten)

**Fall 3:**  $c > b^2$  (keine reellen Nullstellen)

Variablentransformation  $\varphi(x) = \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \implies$

$$\frac{1}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + 1}, \text{ also}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \int \frac{1}{\varphi^2(x) + 1} \varphi'(x) dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \left\{ \int \frac{1}{1 + y^2} dy \right\}_{y=\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \varphi(x) =$$

$$\frac{1}{c-b^2} \arctan \frac{x+b}{c-b^2}.$$

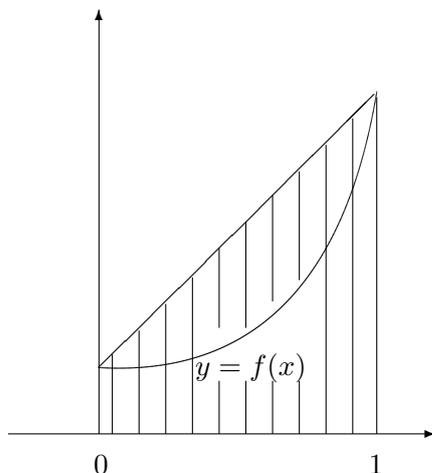
### Zur numerischen Berechnung von Integralen

**Satz 12.10 :** (Trapez-Regel)

Sei  $f \in C^2((0, 1], \mathbb{R})$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in [0, 1]$  mit

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(x_0)}$$

**Bem.:**



$$\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) = \text{Fläche des Trapezes}$$

$$-\frac{1}{12} f''(x_0) = \text{Korrekturterm}$$

**Beweis:** Sei  $\varphi(x) := \frac{1}{2} x(1-x) \geq 0$  auf  $[0, 1] \implies$

$$\int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 \varphi''(x) f(x) dx = \underbrace{-\varphi(x) f(x) \Big|_0^1}_{= \frac{1}{2} (f(0)+f(1))} + \int_0^1 \varphi'(x) f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) + \underbrace{(\varphi(x) \cdot f'(x)) \Big|_0^1}_{= 0} - \int_0^1 \varphi(x) f''(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - f''(x_0) \underbrace{\int_0^1 \varphi(x) dx}_{= 1/12}$$

nach dem MWS der Integralrechnung. □

**Korollar:** Es sei  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  und  $K := \sup \{|f''(x)| : a \leq x \leq b\}$

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $h := \frac{b-a}{n}$  gilt dann:

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) + \frac{1}{2} f(b) \right\} \cdot h + R$$

mit

$$|R| \leq \frac{K}{12} (b-a) \cdot h^2 = \frac{K}{12} (b-a)^3 \frac{1}{n^2}.$$

**Beweis:** wende 12.10 an auf die Intervalle  $[a + [k-1]h, a + k \cdot h]$  und summiere über  $k$ .

**Bem.:** für  $n \rightarrow \infty$  erhält man eine Approximation des Integrals durch Summen.

□

### Integration einiger Klassen von elementaren Funktionen (→ Übungen!)

#### 1) Rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten (→ Partialbruchzerlegung)

Sei  $R = P/Q$  ;  $\int R(x) dx = ?$

$P, Q$  zunächst komplexe Polynome      Vorgehensweise:

i) Fundamentalsatz der Algebra  $\implies$  (o.E. Leitkoeff. von  $Q = 1$ )

$$Q(z) = (z - \alpha_1)^{n_1} (z - \alpha_2)^{n_2} \dots (z - \alpha_s)^{n_s}$$

$\alpha_k =$  Nullstellen von  $Q$ ,  $n_k =$  Vielfachheit von  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, s \implies$  o.E.  
 $P(\alpha_k) \neq 0$ , sonst kürzen!

ii) zeige: es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom  $p$  mit

$$* \quad R = H_1 + H_2 + \dots + H_s + p,$$

wobei die Hauptteile  $H_j$  erklärt sind durch

$$H_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} a_{jk} \cdot (z - \alpha_j)^{-k}, \quad j = 1, \dots, s$$

(es gilt  $p \equiv 0$ , falls  $\text{grad}P < \text{grad}Q$ !)

Die Koeffizienten  $a_{jk}$  werden eindeutig festgelegt durch die Forderung

$$R - H_j \text{ ist in } \alpha_j \text{ nicht singular.}$$

iii) für  $x \in \mathbb{R}$  folgt:

$$R(x) = \sum_{j=1}^s H_j(x) + p(x),$$

d.h.  $\int R(x) dx$  zurückgeführt auf  $\int H_j(x) dx$

beachte:  $\left\{ \begin{array}{l} P, Q \text{ haben reelle Koeffizienten} \implies \\ \text{mit } \alpha \text{ ist auch } \bar{\alpha} \text{ Nullstelle von } Q, \text{ und zwar mit} \\ \text{derselben Vielfachheit.} \end{array} \right.$

Man fasse dann in \* “ $H_\alpha$  und  $H_{\bar{\alpha}}$ ” zusammen.  
vgl. Beispiel (iv) von vorhin!

**Beispiel:**  $\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx = ?$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } Q(x) &= x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)\left(x + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (x - \alpha) \cdot (x - \beta)(x - \bar{\beta}), \quad \alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vielfachheit jeweils 1

$$\implies R(x) = p(x) + \frac{a}{x - \alpha} + \frac{b}{x - \beta} + \frac{c}{x - \bar{\beta}}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\implies p(x) = 0 \text{ aus Gradgründen und}$$

$$R(x) = \left\{ a \cdot (x - \beta)(x - \bar{\beta}) + b(x - \alpha)(x - \bar{\beta}) + c \cdot (x - \alpha)(x - \beta) \right\} / Q(x)$$

$$\implies 3x^2 + 2x - 2 = a \cdot (x - \beta)(x - \bar{\beta}) + b(x - \alpha)(x - \bar{\beta}) + c(x - \alpha)(x - \beta)$$

als Bestimmungsgleichung für  $a, b, c$

$$\text{Vergleich} \implies \left\{ \begin{array}{l} 3 = a + b + c \\ 2 = -a(\beta + \bar{\beta}) - b(\alpha + \bar{\beta}) - c(\alpha + \beta) \\ -2 = a \cdot |\beta|^2 + b\alpha\bar{\beta} + c\alpha\beta \end{array} \right.$$

Einsetzen der Werte für  $\alpha, \beta$ :  $3 = a + b + c$

$$2 = a - b \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - c \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$-2 = a + b \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + c \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Lösung:  $a = 1, b = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i, c = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{x-1} + \left[ \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i}{x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i}{x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \left[ \quad \right] &= \frac{b}{x-\beta} + \frac{\bar{b}}{x-\bar{\beta}} = \frac{x(b+\bar{b}) - (b\bar{\beta} + \beta\bar{b})}{x^2 - (\beta+\bar{\beta})x + |\beta|^2} \\ &= (2x+3) / (x^2+x+1) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2+x+1}$$

mit

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{d}{dx} \ln(x^2+x+1) dx = \ln(x^2+x+1)$$

$$\text{und } \int \frac{2}{x^2+x+1} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad \text{nach Bspl. iv.}$$

$$\Rightarrow \int R(x) dx = \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

ausführliche Darstellung: Ostrowski, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung p.232 f.

## 2) Reduktion auf Integrale rationale Funktionen

$R(x, y) =$  rationale Funktion in zwei Variablen

$$= P(x, y) / Q(x, y) \quad \text{z.B. } \frac{x^4+y^6}{y^8+x^2+1}$$

$P, Q =$  Polynome in  $x$  und  $y$ .

$$(i) \int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = ? \quad n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

Transformation:  $y = \sqrt[n]{ax+b}$  bzw.  $x = \varphi(y) := \frac{1}{a}(y^n - b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx \Big|_{x=\varphi(y)} &= \int R\left(\varphi(y), \sqrt[n]{a\varphi(y)+b}\right) \cdot \varphi'(y) dy \\ &= \int R\left(\frac{1}{a}(y^n - b), y\right) \cdot \frac{n}{a} \cdot (y^{n-1} - b) dy \end{aligned}$$

(ii)  $\int R(e^x) dx$  oder  $\int R(\cosh x, \sinh x) dx = ?$

Transformation:  $y = e^x \iff x = \ln y$

$$\implies \int R(e^x) dx \Big|_{x=\ln y} = \int R(y) \frac{1}{y} dy \quad \text{bzw.}$$

$$\int R(e^x) dx = \int R(y) \frac{1}{y} dy \Big|_{y=e^x}$$

$$\text{und } \int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int \frac{1}{y} R\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right), \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) dy \Big|_{y=e^x}$$

(iii)  $\int R(\cos x, \sin x) dx = ?$

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \quad *$$

Transformation:  $x = 2 \cdot \arctan y$

$$\implies \cos(2 \arctan y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin(2 \arctan y) = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\text{also: } \int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right) \frac{2}{1+y^2} dy \Big|_{y=\tan \frac{x}{2}}$$

(iv)  $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + b + c}\right) dx$ ,  $b^2 \neq a \cdot c$ , kann durch quadratische Ergänzung und lineare

Transformation überführt werden in

$$\begin{array}{ccc} \int R\left(y, \sqrt{1+y^2}\right) dy & \text{oder} & \int R\left(y, \sqrt{1-y^2}\right) dy & \text{oder} & \int R\left(y, \sqrt{y^2-1}\right) dy \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y = \sinh z & & y = \cos z & & y = \cosh z \end{array}$$

$\implies$  Integrale vom Typ (ii) oder (iii)

**Achtung:** Es gibt Funktionen, deren Stammfunktion nicht mehr elementar

ausgedrückt werden kann, etwa  $\int e^{x^2} dx$ .

Dabei verstehen wir unter einer elementaren Funktion

Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen

sowie alle Funktionen, die man aus o.g. durch endliche Verkettungen und endliche Durchführung algebraischer Operationen gewinnen kann.

Die Stammfunktion von  $e^{x^2}$  ist nicht von dieser Form, so dass man nicht grundsätzlich

$$\int f(x) dx$$

“ausrechnen” kann. □

### Uneigentliche Integrale

erhält man durch Grenzprozess: es ist

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1 \text{ bei } x \rightarrow \infty,$$

also wird man setzen  $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$ .

#### Definition 12.5 :

i) Sei  $I = [a, b)$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $a < b \leq +\infty$ .

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$  sei Regelfunktion. Man setzt:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{s \nearrow b} \int_a^s f(x) dx, \text{ falls existent}$$

ii) entsprechend für  $(a, b]$  mit  $-\infty \leq a < b \in \mathbb{R}$ .

iii) Sei  $I := (a, b)$  mit  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$  sei Regelfunktion:  $\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

falls für ein  $c \in (a, b)$  die beiden uneigentlichen Integrale rechts existieren.

**Bem.:**

1) Existenz für ein  $c \iff$  Existenz für alle  $c$

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$  existiert nicht, denn mit  $c = 0$  ist

$$\int_0^t x \, dx = \frac{1}{2} t^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty, \int_s^0 x \, dx = -\frac{1}{2} s^2 \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} -\infty$$

Andererseits  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x \, dx = 0.$

**Dies macht deutlich, dass man im Falle eines Grenzübergangs an beiden Grenzen die kompliziertere Definition iii) wählen muss. Hat man allerdings die Existenz von**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

sichergestellt, so kann man zur Berechnung die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) \, dx$$

wählen.

3) ein uneigentliches Integral heißt absolut konvergent  $\iff \int_a^b |f(x)| \, dx$  existiert

**Beispiele:** i)  $\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ existiert } \iff s > 1}$

denn:  $\int_1^a \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} (1 - a^{1-s}), s \neq 1$

bzw.  $= \log a, s = 1$

$a \rightarrow \infty$  ergibt Konvergenz der rechten Seite (gegen  $\frac{1}{s-1}$ ) nur für  $s > 1$ .

ii)  $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ existiert } \iff s < 1}$

$$\text{denn: } \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} -\log \alpha, & s = 1 \\ \frac{1}{1-s} (1 - \alpha^{1-s}), & s \neq 1 \end{cases}$$

iii) aus ii), i) folgt:  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s}$  existiert für kein  $s \in \mathbb{R}$

iv)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \\ \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \nearrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -\arctan a + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b \\ &= \pi/2 + \pi/2 = \pi. \end{aligned}$$

**Satz 12.11 :** (Majorantenkriterium)

Seien  $\mathbb{R} \ni a < b \leq \infty$ ,  $f, g$  seien Regelfunktionen auf  $[a, b)$ . Es gelte  $|f| \leq g$ .

Existiert dann  $\int_a^b g(x) dx$  so auch  $\int_a^b f(x) dx$ .

Das Integral konvergiert sogar absolut.

**Bem.:** analoge Aussagen gelten für andere Grenzübergänge.

**Beweis:** Sei  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ,  $x \in [a, b)$

$$\implies |F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_y^x |g(t)| dt \right|$$

für alle  $x, y \in [a, b)$  bzw. mit  $G(x) := \int_a^x |g(t)| dt$ :

$$* \quad \left| F(x) - F(y) \right| \leq \left| G(x) - G(y) \right|.$$

Da  $\lim_{x \uparrow b} G(x)$  existiert, genügt  $G$  dem Cauchy-Kriterium. Aus \* folgt das Cauchy-Kriterium für  $F$ , also die Beh. □

Als Anwendung beweisen wir

**Satz 12.12 :** (Grenzwertkriterium)

Seien  $f, g$  Regelfunktionen auf  $[a, b)$  mit  $g > 0$ .  
Existieren

$$\lim_{x \nearrow b} f(x)/g(x) \text{ und } \int_a^b g(x) dx,$$

so auch  $\int_a^b f(x) dx$ . (analog: andere Grenzübergänge)

**Beweis:**

$$\alpha := \lim_{x \uparrow b} f(x)/g(x) \implies \exists a' \in [a, b) \text{ mit}$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| \leq 1 \quad \text{auf } [a', b) \implies$$

$$\left| f(x) \right| \leq (1 + |\alpha|)g(x) \quad \text{auf } [a', b) \implies$$

12.11

$$\int_{a'}^b f(x) dx \text{ existiert.}$$

Dann existiert natürlich auch  $\int_a^b f(x) dx$ . □

Die Gamma-Funktion  $\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$  ist wohldefiniert für  $s > 0$  (s. Übungen).

Eigenschaften von  $\Gamma(s)$ :

$$(1) \quad \Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s), s > 0$$

$$(2) \quad \Gamma(1) = 1$$

$$(3) \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad , n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Siehe Übungen.

**Satz 12.13 :** Uneigentliche Integrale und Reihen

Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend und  $\geq 0$ . Dann existiert der Grenzwert

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right)$$

und erfüllt  $0 \leq s \leq f(1)$ .

D. h.:  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  konvergent  $\iff \int_1^{\infty} f(x) dx$  existiert.

**Beweis:**

Es ist  $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$ . \* Sei  $a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \implies$

$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq 0$  (s.o.), also  $\{a_n\}$  wachsend mit  $0 \leq a_n$ ,

denn  $a_1 = f(1) - \int_1^2 f(x) dx \geq f(1) - f(1) = 0$ , die Monotonie von  $\{a_n\}$  ergibt  $a_n \geq 0$ .

Außerdem gilt:  $a_n \leq f(1) - f(n+1)$ :

$$\begin{aligned} a_n &= f(1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx - f(n+1) \\ &= f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \underbrace{\left( f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right)}_{\leq 0 \text{ nach } * \text{ (2te Ungl.)}} \\ &\leq f(1) - f(n+1). \end{aligned}$$

Da  $\{f(n)\}$  monoton fällt und  $\geq 0$  ist, existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ,

also:  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq f(1)$ . □

**Beispiele:**

1)  $f(x) = 1/x$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n 1/k - \log(n+1) \right) =: c$$

existiert.  $c$  heißt Euler - Mascheroni Konstante.

Es ist unbekannt, ob  $c \in \mathbb{Q}$ .

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \quad \text{konvergent genau für } s > 1 \iff$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \text{konvergent genau für } s > 1.$$

## §13

# Vertauschungssätze für Folgen und Reihen von Funktionen

geben Antwort auf folgende Fragen: Seien  $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

$$\text{i) } f_n \rightarrow f \stackrel{?}{\implies} \int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{ii) } f_n \rightarrow f \stackrel{?}{\implies} f'_n \rightarrow f',$$

$$\text{iii) } \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

$$\text{iv) } \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \dots,$$

wobei iii), iv) Spezialfälle sind von i), ii).

Im Gegensatz zur Konvergenz von Folgen und Reihen in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  wo es nur eine kanonische Definition gibt, hat man bei Funktionenfolgen die Wahl zwischen mehreren Konvergenzbegriffen.

**Definition 13.1** Seien  $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

a)  $\{f_n\}$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$   $:\Leftrightarrow$

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(D.h.: zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$  und alle  $x \in D$ )

Schreibweise:  $f_n \xrightarrow{\rightarrow} f, n \rightarrow \infty$

Bemerkung: setzt man  $\|\varphi\| := \sup_{x \in D} |\varphi(x)|$ , so bedeutet gleichmäßige

Konvergenz  $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

b)  $\{f_n\}$  konvergiert punktweise auf  $D$  gegen  $f$   $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Schreibweise:  $f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty$

c)  $\{f_n\}$  ist gleichmäßige Cauchy-Folge  $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon$$

## FOLGERUNGEN

$$1) \quad \boxed{f_n \xrightarrow{\rightarrow} f \implies f_n \rightarrow f}$$

Umkehrung ist falsch:  $f_n(x) := x^n, 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N}$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} = f(x)$$

für jede Stelle  $0 \leq x \leq 1$ . Angenommen  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ .

Sei  $x_n = 1 - 1/n \in [0, 1)$ . Dann ist  $(1 - 1/n)^n = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\| \rightarrow 0$ ,

aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^n = 1/e$ .

2)  $\boxed{\begin{array}{l} \{f_n\} \text{ glm. Cauchy-Folge auf } D \iff \\ \text{es gibt eine Funktion } f \text{ auf } D \text{ mit } f_n \xrightarrow{\quad} f. \end{array}}$

Beweis: für jedes  $x$  ist  $\{f_n(x)\}$  Cauchy-Folge, also existiert  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ; zeige (Übung):  
 $f_n \xrightarrow{\quad} f$ . □

3)  $\left| \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\quad} f \iff \\ \text{es gibt eine Nullfolge } \{a_n\}, a_n \geq 0, \text{ mit} \\ |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \text{ für alle } x \in D \text{ und alle } n \iff \\ \text{für jede Folge } \{x_n\} \text{ in } D \text{ ist } |f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right.$

**Satz 13.1 :**

$\boxed{\text{Seien } f_n : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig in } a \in D.}$

$\boxed{\text{Gilt dann } f_n \xrightarrow{\quad} f \text{ auf } D,}$

$\boxed{\text{so ist } f \text{ ebenfalls stetig in } a.}$

Kurzfassung: glm. Limiten stetiger Funktionen sind stetig.

**Bemerkung:** Im Gegenbeispiel von vorhin ist die Grenzfunktion unstetig, also kann nach 13.1 keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen.

**Beweis:** Sei  $x_n \rightarrow a$ ;  $|f(x_n) - f(a)| =$

$$|f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) - f_k(a) + f_k(a) - f(a)| \leq$$

$$2 \cdot \|f_k - f\| + |f_k(x_n) - f_k(a)| \text{ gilt für alle } n, k.$$

$$\varepsilon > 0 \text{ gegeben} \implies \exists k : \|f_k - f\| \leq \varepsilon/3$$

Damit ist  $k$  festgelegt. Nun benutze die Stetigkeit von  $f_k$  in  $a$ , um  $N_\varepsilon$  auszurechnen mit  $|f_k(x_n) - f_k(a)| \leq \varepsilon/3$  für alle  $n \geq N_\varepsilon$ .

Man bekommt:  $|f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$ , also Stetigkeit von  $f$  in  $a$ . □

Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz erhält also gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit von Funktionen.

Als Anwendung bekommen wir

**KOROLLAR:**  $\{f_n\}$  Folge stetiger Funktionen,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$   
 glm. konvergent  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  stetig.

( eine Funktionenreihe ist z.B. dann glm. konvergent, wenn  $\|f_n\| \leq \alpha_n$  mit  $\alpha_n \geq 0$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$  )

Außerdem liefert 13.1 sofort den folgenden Vertauschungssatz

**Satz 13.2 :** Es gelte  $f_n \in C^0([a, b])$  sowie  $f_n \xrightarrow{\rightarrow} f$ .

Dann ist  $f$  über  $[a, b]$  integrierbar und

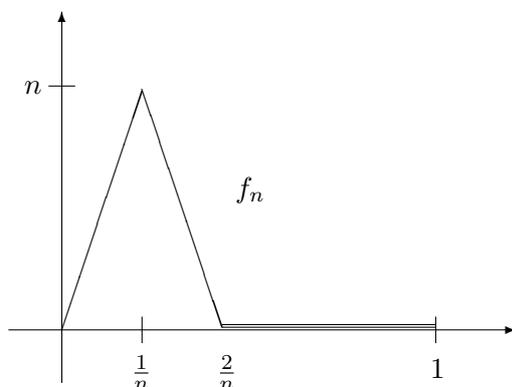
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

**Bemerkung und Beweis:** Die selbe Aussage gilt für Regelfunktionen  $f_n$ , man vergleiche dazu die Bem. nach dem Approximationssatz 12.3, dass  $\mathcal{R}([a, b])$  abgeschlossen ist bzgl. glm. Konvergenz. Also existiert in jedem Fall  $\int_a^b f(x) dx$  und

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \|f_n - f\| \cdot (b - a) \rightarrow 0.$$

□

**Gegenbeispiel:**  $\int_a^b f_n(x)dx \not\rightarrow \int_a^b f(x)dx$  i.a. bei nur punktwiser Konvergenz!



$f_n(x) \rightarrow 0, x \in [0, 1],$  aber  $\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0.$

**Bemerkung:** Vertauschung bei uneigentlichen Integralen

$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  seien integrierbar,  $f_n \xrightarrow{?} f$

Daraus folgt auch für stetige  $f_n$  i.a. nicht

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Dies wird klar, wenn man sich die Definition von  $\int_0^{\infty}$  vergegenwärtigt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x)dx \right) \stackrel{?}{=} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x)dx \right) &\stackrel{13.2}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

Offen ist nämlich, ob man bei “?” die Reihenfolge der beiden Grenzübergänge ändern darf. Die Antwort ist positiv, wenn

$$\left| \sup_n \left| \int_0^a f_n(x)dx - \int_0^{\infty} f_n(x)dx \right| \right| \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

gilt, d.h. wenn die Konvergenz  $\int_0^a f_n(x) dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$  gleich schnell erfolgt für alle  $n$ .

(Die gleichen Ausführungen gelten sinngemäß auch für jeden anderen Typ von uneigentlichen Integralen.) Wir geben ein Beispiel, wo dies nicht der Fall ist.

$$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-x/n}, n \in \mathbb{N}$$

$$(1) \quad f_n \xrightarrow{\rightarrow} 0 \quad \text{glm.}$$

$$\text{denn: } f_n(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad f_n \geq 0$$

$$\implies \exists x_n : f_n(x_n) = \sup f_n = \|f_n\|,$$

$$\text{also } 0 = f_n'(x_n) = \frac{1}{n^2} e^{-x_n/n} - \frac{x_n}{n^3} e^{-x_n/n} \iff x_n = n$$

$$\text{Daraus folgt: } \|f_n\| = f_n(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e} \rightarrow 0.$$

$$(2) \quad \int_0^\infty f_n(x) dx = \int_0^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n} \cdot e^{-x/n} dx =$$

$$\int_0^\infty t \cdot e^{-t} dt = \left( t \cdot (-e^{-t}) \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

**Satz 13.3 :** (Vertauschung von Grenzübergang und Ableitung)

Sei  $f_n \in C^1([a, b])$  mit  $f_n \rightarrow f$  punktweise. Die Folge  $\{f_n'\}$  konvergiere glm. gegen eine Funktion  $g$ . Dann ist  $f \in C^1([a, b])$  mit  $f' = g$ .

**Bemerkungen:**

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} f_n \in C^1([a, b]), \\ f_n \xrightarrow{\rightarrow} f, \\ f \text{ differenzierbar} \end{array} \right\} \not\Rightarrow \text{Konvergenz von } \{f_n'\} \text{ in irgendeinem Sinn gegen } f'$$

**Beispiel:**  $f_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ ; offenbar  $f_n \xrightarrow{\rightrightarrows} f$

aber  $f'_n(x) = \cos(nx)$  nicht konvergent

$$(2) \quad \begin{array}{l} f_n \in C^1([a, b]), f_n \xrightarrow{\rightrightarrows} f \not\Rightarrow \\ f \in C^1([a, b]) \end{array}$$

**Beispiel:** Übung

Beweis des Satzes:  $g := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \in C^0([a, b])$  nach 13.1

$$\text{Hauptsatz} \implies f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$$

$$\text{Satz 13.2} \implies \int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^x g(t) dt$$

punktweise Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  ergibt:  $f_n(x) \rightarrow f(x), f_n(a) \rightarrow f(a)$ .

Zusammen:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

$x \mapsto f(a) + \int_a^x g(t) dt$  ist nach dem Hauptsatz differenzierbar mit Ableitung  $g$ . □

## ANWENDUNGEN

Wir wollen zeigen

$$(1) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$\downarrow \quad x = 0$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Sei dazu  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Die Funktionenreihe ist gleichmäßig konvergent, denn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty.$$

Mit  $f_N(x) := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cos(nx)$  ist

$$f'_N(x) = \sum_{n=1}^N -\frac{1}{n} \cdot \sin(nx),$$

und wir müssen zeigen, ob und wo  $\{f'_N\}$  gleichmäßig konvergiert.

**Hilfssatz:** Für jedes  $\delta > 0$  konvergiert  $\{f'_N\}$  auf  $[\delta, 2\pi - \delta]$  gleichmäßig gegen  $x \mapsto \frac{x-\pi}{2}$ .

Nehmen wir dies zur Kenntnis, so liefert 13.1

$$f'(x) = \frac{x-\pi}{2} \quad \text{auf} \quad [\delta, 2\pi - \delta],$$

also  $f'(x) = \frac{x-\pi}{2}$  auf  $(0, 2\pi)$  wegen der

Beliebigkeit von  $\delta$ . Also findet man ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{4} (x - \pi)^2 + c$  auf  $(0, 2\pi)$ , und da  $f$  auf  $\mathbb{R}$  stetig ist (da  $f_N \in C^\circ$  und  $f_N \xrightarrow{\rightarrow} f$ ), hat man diese Gleichung auf  $[0, 2\pi]$ .

Berechnung von  $c$ :

$$\int_0^{2\pi} \left\{ c + \frac{1}{4} (x - \pi)^2 \right\} dx = 2\pi c + \frac{1}{12} (x - \pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \stackrel{13.2}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f_N(x) dx =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0,$$

also  $c = -\frac{\pi^2}{12}$ . Einsetzen ergibt die Beziehung (1).

**Zum Hilfssatz:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) &= \int_{\pi}^x \cos(n \cdot t) dt \implies \\
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin(nx) &= \int_{\pi}^x \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt \quad \text{mit} \\
 \sum_{n=1}^N \cos(nt) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (e^{int} + e^{-int}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} e^{-iNt} \sum_{k=0}^{2N} e^{ikt} - \frac{1}{2} \\
 &\hspace{15em} \text{(geometrische Summenformel, } t \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z}) \\
 &= \frac{1}{2} e^{-iNt} \frac{1 - e^{i(2N+1)t}}{1 - e^{it}} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{-iNt} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin(N+\frac{1}{2}) \cdot t}{\sin t/2} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Dies eingesetzt liefert

$$(2) \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) = \int_{\pi}^x \frac{1}{2} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin t/2} dt - \frac{1}{2} (x - \pi),$$

wobei man  $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$  beachten muß, also  $t/2 \notin \pi\mathbb{Z}$ . Für  $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$  ist  $t \mapsto 1/\sin(t/2)$  auf dem Integrationsbereich wohldefiniert, und die Behauptung des Hilfssatzes folgt nun aus (2) und der

Übungsaufgabe :

$$* \left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } \varphi \in C^1([\alpha, \beta]) \text{ und} \\ \Psi(y) := \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sin(yt) dt, \quad y \in \mathbb{R}. \\ \text{Dann gilt: } \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Psi(y) = 0 \end{array} \right.$$

weitere Übung: führe damit im Detail aus, wie sich aus (2) die Behauptung des Hilfssatzes ergibt. (s.u., Bem.)

**Bemerkungen:** aus (2) und \* folgt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) = \frac{\pi-x}{2}, x \in (0, 2\pi)$  aber noch nicht notwendig glm. Kvgnz auf  $[\delta, 2\pi - \delta]$ ; das sieht man so

$$\begin{aligned} S_n(x) &:= \sum_{n=1}^N \sin(nx) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=1}^N e^{inx} \right) \implies \\ |S_N(x)| &\leq \left| \sum_{n=1}^N e^{inx} \right| = \left| \frac{e^{i(N+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} \right| \\ &\leq 2 \left/ |e^{ix/2} - e^{-ix/2}| \right. = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq 1 \left/ \sin(\delta/2), x \in [\delta, 2\pi - \delta]. \right. \end{aligned}$$

Für  $M > N$  folgt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^M \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \right| &= \sum_{n=N}^M S_N(x) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{S_M(x)}{M+1} - \frac{S_{N-1}(x)}{N} \\ &\leq \frac{1}{\sin \delta/2} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+1} + \frac{1}{N} \right) \leq \frac{2}{N \sin \delta/2} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

also eine glm. Cauchy-Bed.

## §14

# Parameterabhängige Integrale

haben die Form  $\int_a^b f(x, t) dx$ , d.h. der Integrand hängt außer von der Integrationsvariablen ( $x$ ) noch von einer anderen Variablen ( $t$ ) ab, die eine gewisse Menge  $D$  durchläuft. Man bekommt also eine Funktion  $t \mapsto \int_a^b f(x, t) dx$  und fragt nach Stetigkeit oder Differenzierbarkeit, etc. Im Spezialfall  $D = \mathbb{N}$  hat man die Situation aus 13.2.

**Beispiel:** Sei  $F(t) := \int_a^b x^t dx$  für  $0 < a < b$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Man bekommt: } F(t) = \left\{ \begin{array}{l} \ln b/a, \quad t = -1 \\ \frac{1}{t+1} (b^{t+1} - a^{t+1}), \quad t \neq -1 \end{array} \right\},$$

und mit L'Hospital folgt Stetigkeit von  $F$  auch in  $t = -1$ . Allgemein gilt:

**Satz 14.1 :** *Es seien  $I = [a, b], D = [c, d]$  kompakte Intervalle und  $f \in C^\circ(I \times D)$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $F(t) := \int_a^b f(x, t) dx$  für alle  $t \in D$  definiert und dort stetig.*

**Beweis:**  $f \in C^\circ(I \times D) \Rightarrow f(\bullet, t) \in C^\circ(I)$  für jedes  $t$ , d.h.  $\int_a^b f(x, t) dx$  ist erklärt.

Zur Stetigkeit:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben;  $I \times D$  ist kompakt in  $\mathbb{R}^2$ , also  $f$  dort gleichmäßig stetig, d.h.:  $\exists \delta > 0$  mit  $|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| \leq \varepsilon/(b-a)$  für alle  $(x_i, t_i) \in I \times D$  mit  $|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| \leq \delta$ .

Speziell: \*  $|f(x, t_1) - f(x, t_2)| \leq \varepsilon/(b-a), |t_1 - t_2| \leq \delta, x \in I.$

Man bekommt:

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &= \left| \int_a^b (f(x, t_1) - f(x, t_2)) dx \right| \leq \\ &\int_a^b |f(x, t_1) - f(x, t_2)| dx \stackrel{*}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

für  $t_1, t_2 \in D, |t_1 - t_2| \leq \delta.$   $F$  ist also sogar glm. stetig. □

**Bemerkung:** Die Voraussetzungen an  $f$  können etwas abgeschwächt werden, man vergleiche dazu Barner, Flohr Bd.I, p.399.

Wir möchten nun  $F$  differenzieren. Die Vorstellung ist, dass man  $F'(t)$  durch Ableiten unter dem Integral nach der Variablen  $t$  erhält.

**Notation:** Wenn bei festem  $x \in I$  die Funktion  $D \ni t \mapsto f(x, t)$  differenzierbar ist, so nennen wir die Ableitungsfunktion die partielle Ableitung von  $f$  nach  $t$ ,

Schreibweise:  $\boxed{D_2f \text{ oder } D_t f}$  oder  $\frac{\partial}{\partial t} f.$

Es ist also:

$$D_t f(x, t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x, t+h) - f(x, t))$$

**Beispiel:**  $f(x, t) = \sin(xt); D_2f(x, t) = x \cos(xt)$

**Satz 14.2 :** (Ableiten eines Integrals nach dem Parameter)

Seien  $I, D$  wie in 14.1. Außerdem gelte:

- i)  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$  ist für jedes  $t \in D$  Regelfunktion auf  $I$   
d.h.  $f(\bullet, t) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall t \in D$
- ii)  $D_2f$  sei auf  $I \times D$  definiert und stetig.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist} \quad F(t) &:= \int_a^b f(x, t) \, dx \quad \underline{\text{differenzierbar auf } D} \\ \text{mit} \quad F'(t) &= \int_a^b D_2 f(x, t) \, dx. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Durch komponentenweise Anwendung gilt das Resultat natürlich auch für  $\mathbb{C}$ -wertige  $f$ .

**Beweis:** Die Voraussetzungen ergeben die Existenz von  $\int_a^b f(x, t) \, dx$ ,  $\int_a^b D_2 f(x, t) \, dx$  für alle  $t \in D$ . Zu zeigen ist:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( F(t+h) - F(t) \right) = \int_a^b D_2 f(x, t) \, dx,$$

wobei für Randpunkte  $t$  natürlich nur einseitige Limiten in Frage kommen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \left( F(t+h) - F(t) \right) - \int_a^b D_2 f(x, t) \, dx \right| = \\ & \left| \int_a^b \left\{ \frac{1}{h} \left( f(x, t+h) - f(x, t) \right) - D_2 f(x, t) \right\} dx \right| = \text{(MWS)} \\ & \left| \int_a^b \left( D_2 f(x, T) - D_2 f(x, t) \right) dx \right|, \end{aligned}$$

wobei die Zwischenstelle  $T$  zwischen  $t$  und  $t+h$  liegt und von  $t, h, x$  abhängt.  $D_2 f$  ist gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum  $I \times D$ , zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$\left| D_2 f(x_1, t_1) - D_2 f(x_2, t_2) \right| \leq \varepsilon / (b-a), \quad \left| (x_1, t_1) - (x_2, t_2) \right| \leq \delta$$

Es folgt für  $0 < |h| \leq \delta$ :

$$\left| (x, T) - (x, t) \right| \leq \delta \quad \forall x \in I,$$

also

$$\left| \int_a^b \left( D_2 f(x, T) - D_2 f(x, t) \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| D_2 f(x, T) - D_2 f(x, t) \right| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

**Beispiel:** (wie man mit Hilfe von 14.2 Integrale ausrechnen kann):

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = ?, \quad t \geq 0.}$$

$$\text{Sei } f(x, t) = \begin{cases} (x^t - 1) / \ln x, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad t \geq 0$$

L'Hospital  $\implies f(\bullet, t)$  ist stetig auf  $[0, 1]$  für jedes  $t \geq 0$ , also existiert  $\int_0^1 (x^t - 1) / \ln x dx$  für jedes  $t \geq 0$ .

Für  $D$  wählen wir ein beliebiges Intervall  $[0, d]$  mit  $d > 0$ . Es gilt

$$D_2 f(x, t) = \frac{1}{\ln x} \cdot D_2 (e^{t \cdot \ln x}) = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x \cdot e^{t \cdot \ln x} = x^t, \quad 0 < x \leq 1, \quad t \geq 0$$

und  $D_2 f(0, t) = 0$ , denn  $f(0, \bullet) = 0$ . Die Funktion

$$g : (x, t) \mapsto \begin{cases} x^t, & 0 < x \leq 1, \quad t \in D \\ 0, & x = 0, \quad t \in D \end{cases}$$

ist nun aber nicht stetig auf  $[0, 1] \times [0, d]$ , denn  $g(\frac{1}{n}, 0) = 1 \not\rightarrow g(0, 0) = 0$ . Wählen wir  $0 < c < d$ , so prüft man leicht die Stetigkeit von  $g$  auf  $[0, 1] \times [c, d]$ , d.h. Satz 14.2 ergibt dann

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \int_0^1 x^t dx, \quad t \in [c, d]$$

$$\text{Sei } F(t) := \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx \implies$$

$$F'(t) = \int_0^1 x^t dx = \left( \frac{1}{t+1} x^{t+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t+1}$$

für  $t \in [c, d]$ .

Also ist  $* F(t) = \ln(t+1) + K$  auf  $\mathbb{R}^+$ , denn  $c, d$  sind ja beliebig.  $K$  bezeichnet eine Integrationskonstante.

Andererseits ist  $F(t)$  definiert für alle  $t \geq 0$  und  $f(x, t)$  stetig auf z.B.  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Dazu prüft man Stetigkeit von  $f$  in  $(0, 0)$ : gelte  $(x_n, t_n) \rightarrow (0, 0)$ . Wegen  $f(0, t_n) = f(0, 0) = 0$  sei  $x_n > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } f(x_n, t_n) &= (x_n^{t_n} - 1) / \ln x_n = \left( e^{t_n \cdot \ln x_n} - 1 \right) / \ln x_n \\ &= t_n \cdot \frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n}, \quad \alpha_n := t_n \cdot \ln x_n \leq 0 \end{aligned}$$

Nach dem M.W.S. existiert  $\beta_n \in [\alpha_n, 0]$  mit

$$0 \leq \left( e^{\alpha_n} - 1 \right) / \alpha_n = e^{\beta_n} \leq 1,$$

also  $f(x_n, t_n) = t_n \cdot e^{\beta_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , und nach

Satz 14.1 folgt die Stetigkeit von  $F$  auf  $[0, 1]$ . Mithin gilt \* auch für  $t = 0$  und wegen  $F(0) = 0$  bekommen wir  $K = 0$ . Also lautet unser Ergebnis:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \ln(t + 1), \quad t \geq 0.}$$

Das Beispiel zeigt auch, dass man vor Anwendung der Sätze einige Umwege machen muß. Das hier benutzte Prinzip besagt im wesentlichen, dass man das nach Parameter differenzierte Integral gut auswerten kann und daraus mittels des Hauptsatzes das eigentlich interessierende Integral rekonstruiert. Im Beispiel hat man offensichtlich schon einen natürlichen Parameter  $t$ . Manchmal ist dieser Parameter erst anzubringen, wie etwa im folgenden Fall, den wir aus offensichtlichen Gründen erst später genau diskutieren können:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = ? \\ F(t) &:= \int_0^\infty e^{-tx} \frac{1}{x} \cdot \sin x dx \Rightarrow F'(t) = \int_0^\infty \sin x \cdot e^{-tx} dx \\ &\left[ e^{-tx} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{t} e^{-tx} \right) \rightsquigarrow (\text{part. Int.}) \right] = -\frac{1}{1+t^2} \\ \Rightarrow F(t) &= -\arctan t + c; \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow c = \pi/2 \end{aligned}$$

Also:  $F(0) = \frac{\pi}{2}$

□

**Satz 14.3 :** (Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

Sei  $f \in C^\circ([a, b] \times [c, d])$ . Dann gilt:

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

**Beweis:**  $t \mapsto \int_a^b f(x, t) dx$  ist stetig nach 14.1, also auch integrierbar über  $[c, d]$ , also existiert das Doppelintegral rechts.

Analog: Existenz von  $\int_a^b \left( \int_c^d \dots \right)$ .

$$\text{Seien } F(t) := \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

$$G(y) := \int_c^y F(t) dt, \quad y \in [c, d],$$

$$L(y) := \int_a^b \underbrace{\left( \int_c^y f(x, t) dt \right)}_{=:g(x,y)} dx, \quad y \in [c, d]$$

**Beh.:**  $G(d) = L(d)$

Satz 14.1  $\Rightarrow F \in C^\circ([c, d])$ ; Hauptsatz  $\Rightarrow G \in C^1([c, d])$

mit  $G'(y) = F(y)$  auf  $[c, d]$ .

$$\text{Satz 14.2 } \Rightarrow L'(y) = \int_a^b D_2 g(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx = F(y)$$

Zusammen:  $G(y) = L(y) + K \xrightarrow{y=c} K = 0$ .

also  $G(d) = L(d)$ . □

### Parameterabhängige uneigentliche Integrale

Ziel ist die Verallgemeinerung der Sätze 14.1, 2 auf den Fall uneigentlicher Integrale (vgl. Def. 12.5), wobei wir uns auf den Typ

$$t \mapsto \int_a^\infty f(x, t) dx$$

beschränken mit eigentlicher unterer Grenze  $a \in \mathbb{R}$ . Alle anderen Formen von uneigentlichen Integralen diskutiert man sinngemäß, insbesondere gelten entsprechende Versionen der folgenden Aussagen. Von entscheidender Bedeutung ist die sog. gleichmäßige Konvergenz der Integrale  $\int_a^\infty f(x, t) dx$  bzgl.  $t$ .

**Definition 14.1** Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $D \subset \mathbb{R}$ . Für jedes  $t \in D$  und  $u > a$  sei  $x \mapsto f(x, t)$  Regelfunktion auf  $[a, u]$ . Gibt es dann zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $u_\varepsilon > a$ , so dass für alle  $u_2 > u_1 > u_\varepsilon$  und alle  $t \in D$  gilt

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon,$$

so heißt  $\int_a^\infty f(x, t) dx$  gleichmäßig bzgl.  $t \in D$  konvergent (Die "Reste" werden gleichmäßig klein.)

Zeige (als Übung):

- 1) Unter den Voraussetzungen von 14.1 existieren die Integrale

$$\int_a^\infty f(x, t) dx \text{ für jedes } t \in D$$

- 2) Sei  $0 \leq g \in \mathcal{R}([a, \infty))$  mit  $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$  und
- $$|f(x, t)| \leq g(x)$$
- für alle  $x \in [a, \infty)$ ,  $t \in D$ , wobei  $f(\bullet, t) \in \mathcal{R}([a, \infty))$ .
- Dann sind die Integrale gleichmäßig konvergent. (Majorantenkriterium)

(Hinweis zu 1): beachte die Definition  $\int_a^\infty \varphi(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \varphi(x) dx$ ,  $\varphi(x) := f(x, t)$ , und zeige die Existenz des Limes mit dem Cauchy-Krit.)

**Beispiel:** (vgl. p.17 unten)

Für  $a > 0$  sind die Integrale

$$\int_a^\infty e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx, \int_a^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

gleichmäßig konvergent bzgl.  $t \geq 0$ .

**Bemerkung:** Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ist, kann man sogar glm. Konvergenz von

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$$

bzgl.  $t \geq 0$  zeigen.

**Beweis der glm. Konvergenz:** Seien  $0 < a < u_1 < u_2$ . Wir rechnen komplex:

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \left( \frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x} \right) dx &= \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} e^{ix} \frac{1}{x} dx = \\ \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{x} e^{(-t+i)x} dx &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \left( \frac{1}{-t+i} e^{(-t+i)x} \cdot \frac{1}{x} \right) \Big|_{u_1}^{u_2} \\ &+ \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{i-t} \cdot e^{(i-t)x} dx =: \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Beachte:

$$|t+i| \geq 1, \left| e^{(i-t)x} \right| = e^{-tx} \leq 1 \implies |\alpha| \leq \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}$$

und

$$|\beta| \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}$$

Zusammen:

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \left( \frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x} \right) dx \right| \leq 2/u_1$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $u_\varepsilon = 2/\varepsilon$ . Für  $u_2 > u_1 > u_\varepsilon$  folgt dann sofort (durch Übergang zu Re und Im)

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx \right| \leq \varepsilon$$

für alle  $t \geq 0$ . □

**Satz 14.4 :** (Stetigkeit parameterabhängiger uneigentlicher Integrale)

Ist  $f \in C^\circ \left( [a, \infty) \times [c, d] \right)$  und sind die Integrale  $\int_a^\infty f(x, t) dx$  gleichmäßig konvergent bzgl.  $t \in [c, d]$ , so folgt Stetigkeit von

$$F(t) := \int_a^\infty f(x, t) dx \text{ auf } [c, d].$$

**Beweis:** Sei  $u > a$ . Für  $t_1, t_2 \in [c, d]$  ist

$$\begin{aligned} \left| F(t_1) - F(t_2) \right| &= \left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_u^\infty f(x, t_1) dx - \int_u^\infty f(x, t_2) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right| + \left| \int_u^\infty f(x, t_1) dx \right| + \left| \int_u^\infty f(x, t_2) dx \right| \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Aus der glm. Konvergenz folgt:

$$* \quad \exists u > a : \left| \int_u^\infty f(x, t) dx \right| < \varepsilon/3 \quad \forall t \in [c, d]$$

**Beweis:** Übung!

beachte:  $\exists u$  mit  $\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon/3 \dots\dots$ ,

außerdem:  $\int_{u_1}^{u_2} = \int_a^{u_2} - \int_a^{u_1}$

mit  $u_2 \rightarrow \infty$  folgt:  $\left| \underbrace{\int_a^\infty f(x, t) dx - \int_a^{u_1} f(x, t) dx}_{= \int_{u_1}^\infty f(x, t) dx} \right| < \varepsilon/3$

für alle  $u_1 \geq u$ .

Fixiere  $u$  mit  $*$   $\implies$

$$|F(t_1) - F(t_2)| \leq \frac{2}{3} \varepsilon + \left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right|,$$

und dem Beweis von 14.1 entnimmt man:  $\exists \delta = \delta(u, \varepsilon)$  mit

$$\left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right| \leq \varepsilon/3$$

für alle  $t_1, t_2 \in [c, d]$  mit  $|t_1 - t_2| \leq \delta$ . □

Nachdem gerade bewiesenen Satz existiert  $\int_c^d F(t) dt = \int_c^d \left( \int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt$ .

Dies drängt die Frage auf, ob auch das uneigentliche Integral  $\int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx$  existiert und ob man es durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält.

**Satz 14.5 :** *Unter den Voraussetzungen von 14.4 existiert*

$$\int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx \text{ mit Wert } \int_c^d \left( \int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt.$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben; aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt

$$\exists u_0 > a : \begin{cases} \left| \int_a^\infty f(x,t) dx - \int_a^u f(x,t) dx \right| \leq \varepsilon/(d-c) \\ \text{für alle } u \geq u_0, t \in [c,d] \end{cases}$$

(vgl. p.22) Also gilt  $(F(t) := \int_a^\infty f(x,t) dx)$

$$\left| \int_c^d F(t) dt - \int_c^d \left( \int_a^u f(x,t) dx \right) dt \right| \leq \varepsilon$$

für alle  $u \geq u_0$ . Gemäß 14.3 ist  $\int_c^d \left( \int_a^u \dots dx \right) dt = \int_a^u \left( \int_c^d \dots dt \right) dx$

d.h.:

$$\left| \int_c^d F(t) dt - \int_a^u \left( \int_c^d f(x,t) dt \right) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Per Def. existiert dann  $\int_a^\infty \left( \int_c^d f(x,t) dt \right) dx$  mit dem behaupteten Wert. □

**Beispiel:**  $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/4$

$$f(x,t) := e^{-x} \cos(tx), \quad x \in [0, \infty), \quad t \in [0, 1];$$

$$|f(x,t)| \leq e^{-x} \Rightarrow \int_0^\infty f(x,t) dx \text{ glm. konvergent bzgl. } t$$

Also:

$$\int_0^1 \left( \int_0^\infty e^{-x} \cdot \cos(tx) dx \right) dt \stackrel{14.5}{=} \int_0^\infty \left( \int_0^1 e^{-x} \cos(tx) dt \right) dx;$$

$$\text{l.s.} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{berechne } \int_0^\infty e^{-x} \cdot \cos(tx) dx \\ \text{durch 2 malige partielle Integration} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{r.s.} &= \int_0^\infty \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\{ e^{-x} \frac{1}{x} \cdot \sin(tx) \right\} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

□

Zum Schluß differenzieren wir uneigentliche Integrale nach Parametern.

**Satz 14.6 :** Sei  $f \in C^\circ([a, \infty) \times [c, d])$ . Es soll gelten:

$$i) D_2 f \in C^\circ([a, \infty) \times [c, d])$$

$$ii) \int_a^\infty D_2 f(x, t) dx \text{ gleichmäßig konvergent für } t \in [c, d]$$

$$iii) \int_a^\infty f(x, c) dx \text{ existiert .}$$

Dann ist  $F(t) := \int_a^\infty f(x, t) dx$  für alle  $t \in [c, d]$  definiert und differenzierbar mit

$$F'(t) = \int_a^\infty D_2 f(x, t) dx$$

**Beweis:** Satz 14.5 ergibt die Existenz von

$$\int_c^y \left\{ \int_a^\infty D_2 f(x, t) dx \right\} dt$$

mit Wert

$$\int_a^\infty \left\{ \int_c^y D_2 f(x, t) dt \right\} dx$$

für jede Stelle  $y \in [c, d]$ . Nach dem Hauptsatz ist

$$\int_c^y D_2 f(x, t) dt = f(x, y) - f(x, c),$$

also zusammen:

$$\int_c^y \left\{ \int_a^\infty D_2 f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^\infty (f(x, y) - f(x, c)) dx$$

Vor. iii) ergibt mit dieser Gleichung die Existenz von

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_c^y \left\{ \int_a^\infty D_2 f(x, t) dx \right\} dt + \int_a^\infty f(x, c) dx.$$

Nach i, ii) ist  $\Psi : t \mapsto \int_a^\infty D_2 f(x, t) dx$  stetig (vgl. 14.4), folglich ist  $\int_c^y \Psi(t) dt$  differenzierbar. Das liefert:

$$F'(y) = \Psi(y) = \int_a^\infty D_2 f(x, y) dx.$$

□

**Beispiel:**

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Für  $t \geq 0$  sei  $f(x, t) := e^{-tx} \frac{\sin x}{x}$ ,  $x \in [0, \infty]$ , wobei  $\frac{\sin x}{x}$  stetig in 0 durch 1 ergänzt wird. Es gilt

$$D_2 f(x, t) = -e^{-tx} \sin x,$$

und man sieht für beliebige Wahl von  $0 < c < d$

$$D_2 f \in C^0([0, \infty) \times [c, d]), \quad \int_0^\infty D_2 f(x, t) dx \text{ glm. konvergent bzgl. } t \in [c, d]$$

(hier geht  $c > 0$  ein)

Aus dem Beispiel im Anschluß an Def. 14.1 folgt die Existenz von

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad t \in [c, d].$$

Wir können also Satz 14.6 anwenden:

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty -\sin x \cdot e^{-tx} dx, \quad t \in [c, d].$$

Die rechte Seite ist nach 2maliger partieller Integration  $= -\frac{1}{1+t^2}$  (vgl. Bspl. nach Satz 14.5), also

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = K - \arctan t \quad *$$

für alle  $t > 0$  mit einer Integrationskonstanten  $K$ .

Für  $t = 1$  haben wir (vgl. Bspl. nach 14.5)

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4}, \quad K - \overbrace{\arctan 1}^{=\pi/4} = \pi/4,$$

also  $K = \frac{\pi}{2}$ . Da beide Seiten von  $*$  stetig in 0 fortgesetzt werden können, folgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.$$

□

**Die Gamma-Funktion** (Einzelheiten: Übung)

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

ist wohldefiniert für alle  $t > 0$  [vgl. Bspl. nach Satz 12.12). Wir zeigen:

$\Gamma$  ist von der Klasse  $C^\infty$  auf  $\mathbb{R}^+$  mit

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1} (\ln x)^k e^{-x} dx.$$

**Beweis:** Es reicht, die gleichmäßige Konvergenz von  $\int_0^\infty x^{t-1} (\ln x)^k e^{-x} dx$  bzgl.  $t$  aus einem kompakten Intervall  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$  zu verifizieren, die Behauptung folgt dann aus Satz 14.6 und Induktion nach  $k$ . Man beachte allerdings, dass alle auftretenden Integrale sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze uneigentlich sind. Wie aber auf p. 57 bemerkt, gelten unsere Ergebnisse sinngemäß auch in diesem Fall. Eine andere Möglichkeit, dies zu begründen, besteht in der Zerlegung

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

und anschließender Diskussion dieser beiden Integrale.

Zu  $k \in \mathbb{N}$  berechnet man  $M > 0$  mit

$$\left| (\ln x)^k x^{\alpha/2} \right| \leq M \quad \text{für } x \in (0, 1],$$

$$\left| (\ln x)^k x^{-\beta} \right| \leq M \quad \text{für } x \in [1, \infty).$$

Es folgt für  $t \in [\alpha, \beta]$ :

$$\begin{aligned} |(\ln x)^k e^{-x} x^{t-1}| &\leq \begin{cases} M e^{-x} x^{t-\frac{\alpha}{2}-1} & , 0 < x \leq 1 \\ M e^{-x} x^{\beta+t-1} & , x \geq 1 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} M e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}-1} & , 0 < x \leq 1 \\ M e^{-x} x^{2\beta-1} & , x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Da  $\int_0^1 e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}-1} dx$  und  $\int_1^\infty e^{-x} x^{2\beta-1} dx$  existieren, haben wir eine bzgl.  $t \in [\alpha, \beta]$  uniforme Majorante gefunden.  $\square$

Übungen: 1)  $\Gamma$  ist logarithmisch konvex, d.h.  $\ln(\Gamma)$  ist konvex

(Hinweis: Beh.  $\Leftrightarrow (\Gamma')^2 \leq \Gamma \cdot \Gamma''$ , zeige dies mit geeigneter Anwendung von Cauchy-Schwarz auf den Integranden von  $\Gamma'$ )

2)  $\phi = \ln(\Gamma)$  erfüllt  $\phi(t+1) - \phi(t) = \ln t$  auf  $\mathbb{R}^+$ .

## §16

# Metrische und normierte Räume

sind abstrakte Konzepte dafür, was man unter “Abstandsmessung” versteht.

Wir kennen:

- Abstände von Punkten in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$
- Abstände von Funktionen  $f, g \in \mathcal{C}^\circ([a, b])$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  oder  $\|\cdot\|_2$  (Hilbert-Norm)

**Definition 16.1 :**  $X$  sei eine Menge;  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Metrik auf  $X$  falls gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{Symmetrie} \\ (ii) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \\ (iii) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{Dreiecksungleichung} \end{array} \right.$$

Das Paar  $(X, d)$  heißt metrischer Raum,  $d(x, y)$  Abstand zwischen  $x$  und  $y$ .

**Bemerkungen:**

1) (iii) mit  $x = z \implies 0 \stackrel{(ii)}{=} d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) \stackrel{(i)}{=} 2d(x, y)$ , also  $d(x, y) \geq 0$

2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sei } A \subset X; \quad d_A(x, y) := d(x, y) \text{ für } x, y \in A \implies (A, d_A) \text{ ist ein metrischer Raum.} \\ \text{("Einschränkung")} \end{array} \right.$

**Beispiele:** (für metrische Räume)

1)  $X := \mathbb{R}, \quad d(a, b) := |a - b|$  (Absolutbetrag auf  $\mathbb{R}$ )

$$2) X := \mathbb{C}, \quad d_1(z, w) := |z - w| = \left( (z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2 \right)^{1/2},$$

falls  $z = z_1 + iz_2, w = w_1 + iw_2$   
 $d_1 = \underline{\text{Euklidische Metrik}}$

$d_2(z, w) := |z_1 - w_1| + |z_2 - w_2|$  ist ebenfalls eine Metrik.

merke: ein metrischer Raum besteht immer aus Angabe von 2 Daten, der Trägermenge  $X$  und der Abstandsfunktion  $d$

$$3) \underline{\text{wenig interessant}}: \quad X \text{ beliebige Menge, } d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Übung: prüfe die Axiome für 1), 2), 3)!

Viele metrische Räume kommen in sehr spezieller Weise zustande.

**Definition 16.2** : (*Normierte Vektorräume*)

Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm, falls

$$(i) \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(ii) \|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad (\text{Homogenität})$$

$$(iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

für alle  $x, y \in X, c \in \mathbb{K}$ . Das Paar  $(X, \|\cdot\|)$  heißt normierter Raum.

Es gilt:  $(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum  $\implies d(x, y) := \|x - y\|$   
 ist eine Metrik auf  $X$  (“die von  $\|\cdot\|$  induzierte Metrik”)

**Beispiele:** 1) Sei  $X := \mathbb{R}^n$ . Man setzt für

$$p \in [1, \infty) : \|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{und für}$$

$$p = \infty : \|x\|_\infty := \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \}$$

“ $p$ -Norm auf  $\mathbb{R}$ ”

**Behandlung:**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  ist normierter Raum.

**Beweis:** Fälle  $p = 1, \infty$  klar! (benutze  $\Delta$ -Ungl. für  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{R}$ ). Sei  $p \in (1, \infty)$ ,  $q := \frac{p}{p-1}$  (also  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

Wir haben zu zeigen ( $\Delta$ -Ungl.)

$$* \quad \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

alle anderen Eigenschaften sind klar. Es gilt für  $i = 1, \dots, n$

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \implies$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Rechts wende man Hölder's Ungleichung  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot |\beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^q\right)^{1/q}$  von p. 202 an  $\implies$

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|y\|_p \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Es ist

$$(p-1) \cdot q = p, \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\text{also: } ** \quad \|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p/q} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$$

O.E.  $x + y \neq 0$ , sonst ist \* trivial, dann ist \*\* aber die Behauptung, wie man nach Division durch  $\|x + y\|_p^{p/q}$  sieht.  $\square$

$\longrightarrow$  Übung: Wann gilt " = " in \* ?

Ein wichtiger Spezialfall ist

$$p = 2: \quad \boxed{\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \text{ heißt Euklidische Norm}}$$

Die Euklidische Norm kommt vom

Skalarprodukt:  $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \implies \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Die Hölder-Ungl. für Summen liest sich im Spezialfall  $p = q = 2$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2.$$

**Bemerkung:** Da  $\|\cdot\|_2$  als Norm auf  $\mathbb{R}^n$  sehr häufig betrachtet wird, schreibt man abkürzend  $|x|$  statt  $\|x\|_2$ . (Also:  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ )

2) Sei  $M$  beliebige Menge, setze

$$X := \left\{ f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_M |f(x)| < \infty \right\}$$

Dann gilt: Mit  $\|f\|_\infty := \sup_M |f(x)|$  ist  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  ein normierter V.R.

analog:  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\|f\|_p := \sup_{x \in M} \|f(x)\|_p$

für ein  $p \in [1, \infty]$ ; betrachte

$$X_p := \left\{ f : M \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|f\|_p < \infty \right\}$$

3)

$$X = C^0([a, b]), [a, b] \subset \mathbb{R}$$

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

ist eine Norm auf  $X$ , genannt Lebesgue-Norm.

**Beweis:** Hölder Ungleichung für Integrale von p. 202 + Rechnung wie in 1) führt auf die Dreiecksungleichung, alle anderen Aussagen sind klar.

(beachte:  $\|f\|_{L^p} = 0 \implies \int_a^b |f|^p dx = 0 \xRightarrow{f \text{ stetig}} f = 0$ )

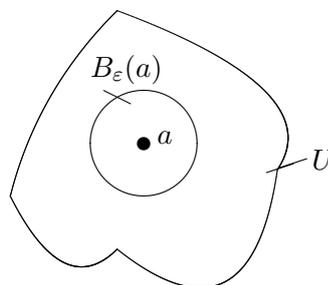
□

Sei ab jetzt  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

$$B_r(a) := \left\{ x \in X : d(x, a) < r \right\} \quad \underline{\text{offene Kugel um } a \text{ mit Radius } r}$$

**Definition 16.3 :** Sei  $a \in X$ .  $U \subset X$  heißt Umgebung von  $a$  :  $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset U.$$



beachte:  $B_\varepsilon(a)$  ist Umgebung von  $a$  für jedes  $\varepsilon > 0$  (“ $\varepsilon$ - Umgebung”).

**Bemerkung:** In metr. Räumen gilt das Trennungsaxiom von Hausdorff.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Zu } x \neq y \text{ gibt es Umgebungen } U(x), U(y) \text{ mit} \\ U(x) \cap U(y) = \emptyset. \end{array} \right.$$

wähle  $U(x) = B_{r/2}(x)$ ,  $U(y) = B_{r/2}(y)$  mit  $r = d(x, y)$

**Definition 16.4 :** (i)  $A \subset X$  heißt offen :  $\Leftrightarrow$

für jedes  $x \in A$  ist  $A$  Umgebung von  $x$   $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A \quad \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$$

(ii)  $B \subset X$  heißt abgeschlossen :  $\Leftrightarrow$

$X - B$  ist offen.

**Satz 16.1 :** i)  $B_r(a)$  ist offen (“offene Kugel” daher korrekt)

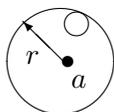
ii)  $\emptyset, X$  sind offen und abgeschlossen

iii) endliche Schritte offener Mengen sind offen

iv)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  Familie offener Mengen  $\implies \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  offen

**Beweis:** (i)  $x \in B_r(a)$ ,  $\varepsilon := r - d(x, a)$

$$\implies B_\varepsilon(x) \subset B_r(a)$$



(ii)  $\emptyset$  offen, da für alle  $x \in \emptyset \dots$

$X$  offen, da  $X$  Umg. jedes Punktes

Durch Komplementbildung folgen die anderen Aussagen.

(iii), (iv) Übung!

**Bemerkung:** 1) Fehlschluß: " $A \subset X$  nicht offen  $\implies A$  abgeschlossen",

denn  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) := |x - y|$  ist weder offen noch abgeschlossen.

2) Offene Mengen in  $\mathbb{R}^n$ :

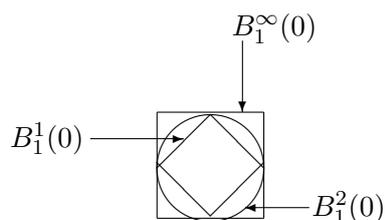
$$p \in [1, \infty), x \in \mathbb{R}^n \implies$$

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p \leq$$

$$\left( n \cdot \|x\|_\infty^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt für die jeweiligen offenen Kugeln  $B_\varepsilon^p(a)$ :

$$* \quad \boxed{B_{\varepsilon/n^{1/p}}^\infty(a) \subset B_\varepsilon^p(a) \subset B_\varepsilon^\infty(a)}$$



beachte:  $B_1, B^\infty$  sind nicht rund!  $B^2$  entspricht dem üblichen Bild.

Aus \* folgt: Jede  $p$ -Norm auf  $\mathbb{R}^n$  liefert die selben offenen Mengen.  
 (“die Topologien sind gleich”)

(Nachfolgend wählen wir eine  $p$ -Norm)

**Beispiele:** 1) beliebige Durchschnitte offener Mengen sind i.a. nicht offen!

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -1/n, 1 + 1/n \right) = [0, 1]$$

dual: beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind i.a. nicht abgeschlossen!

2)  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen,  $(a, b)$  offen,  $[a, b], [a, b), (-\infty, a], [b, \infty)$  abgeschlossen  
weder noch  
 $(a < b)$ ;

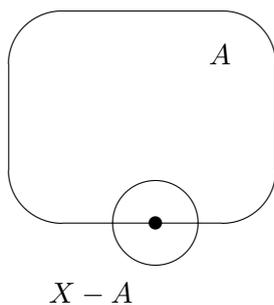
3) Quader: Seien  $a_i < b_i$  für  $i = 1, \dots, n$

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (a_i, b_i) \text{ für } i = 1, \dots, n \right\} \text{ offen}$$

$$T := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i] \text{ für } i = 1, \dots, n \right\} \text{ abgeschlossen}$$

**Definition 16.5 :** Sei  $A \subset X$ .  $x \in X$  heißt Randpunkt von  $A$   $:\Leftrightarrow$

für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ist  $U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X - A)$ . (Jede Umgebung von  $x$  enthält sowohl Punkte aus  $A$  als auch aus  $X - A$ ).  $\partial A :=$  Rand von  $A$  := Menge aller Randpunkte von  $A$ .



**Satz 16.2 :**

(i)  $A - \partial A$  offen

(ii)  $A \cup \partial A$  abgeschlossen

(iii)  $\partial A$  abgeschlossen.

**Beweis:** (i) Sei  $x \in A - \partial A$ .  $\implies$   $x$  kein Randpunkt von  $A$

$\implies \exists \varepsilon > 0$  :  $\underbrace{B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset}_{\text{entfällt, da } x \in A}$  oder  $\underbrace{B_\varepsilon(x) \cap (X - A) = \emptyset}_{\text{dieser Fall tritt ein}}$

$\implies B_\varepsilon(x) \subset A$  \*

Es gilt:  $B_\varepsilon(x) \cap \partial A = \emptyset$

wäre  $y \in B_\varepsilon(x) \cap \partial A$ ; so ist  $B_\varepsilon(x)$  Umgebung des Randpunktes  $y$ ; erhält also per Def. auch Punkte aus  $X - A$ , was \* widerspricht!

Es folgt:  $B_\varepsilon(x) \subset A - \partial A$ , also (i).

(ii) Sei  $A^* := X - A$ ; Symmetrie der Def.  $\implies \partial A^* = \partial A$

(i)  $\implies A^* - \partial A^*$  offen;

also :  $X - (A^* - \partial A^*) = (X - A^*) \cup \partial A^* = A \cup \partial A$  abgeschlossen.

(iii) Es gilt

$$\partial A = (A \cup \partial A) - (A - \partial A) \implies$$

$$X - \partial A = \underbrace{(X - (A \cup \partial A))}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(A - \partial A)}_{\text{offen}} \text{ offen, also } \partial A \text{ abgeschlossen.} \quad \square$$

**Bemerkung:** Sei  $A \subset X$ . Man nennt:

$\overset{\circ}{A} := A - \partial A$  das Innere von  $A$  (offener Kern)

$\bar{A} := A \cup \partial A$  den Abschluß von  $A$  (abgeschlossene Hülle)

**Beispiele:**

- 1)  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  (Einheitssphäre) ist der Rand von  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ .  
( $|\cdot|$  = Eukl. Norm)
- 2)  $A := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| \leq 1\} \implies$   
 $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}, \overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\},$   
 $\partial A = \{0\} \cup S^{n-1}$
- 3) Übung: berechne  $\bar{A}, \overset{\circ}{A}, \partial A$  für Quader der Form  
 $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}, a_i < b_i$
- 4)  $\partial[a, b] = \{a, b\}, [a, b]^\circ = (a, b)$   
 Normierte Vektorräume sind spezielle metrische Räume (die Metrik kommt vor einer Norm), metrische Räume ihrerseits sind spezielle

**Topologische Räume:**

Sei  $X$  eine Menge;  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt Topologie auf  $X$  falls

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$
- (iii)  $U_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in A$  (beliebig)  $\implies \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

Das Paar  $(X, \mathcal{T})$  heißt top. Raum, die Elemente von  $\mathcal{T}$  werden offene Mengen genannt.  $V \subset X$  heißt Umgebung von  $x$  falls es ein  $U \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in U \subset V$ .  $(X, \mathcal{T})$  heißt Hausdorff-Raum, falls es zu  $x \neq y$  disjunkte Umgebungen  $U(x), U(y)$  gibt.

- beachte:
- 1) metrische Räume  $(X, d)$  ergeben Hausdorff-Räume
  - 2) nicht jeder top. Raum ist Hausdorff'sch ( $\rightarrow$  Bspl. in den Übungen)
  - 3) also wird nicht jede Topologie von einer Metrik erzeugt!

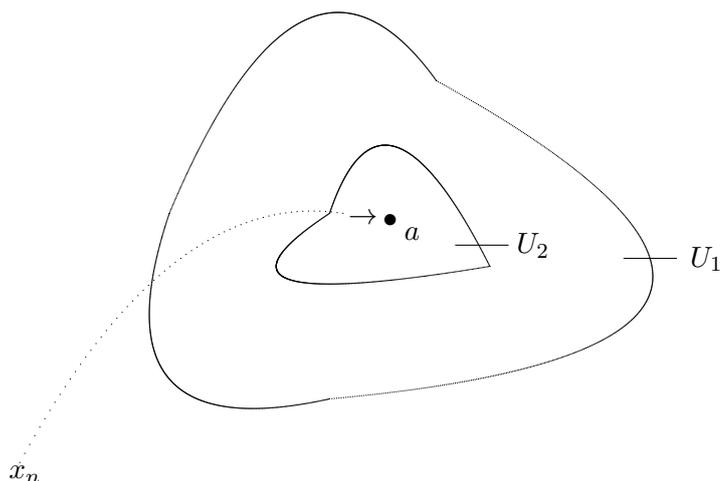
Diskussion topologischer Räume  $\rightarrow$  Spezialvorlesungen "Topologie". □

Metrische Räume erlauben die Diskussion konvergenter Folgen.

**Definition 16.6 :** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum; eine Folge  $\{x_k\}$  ist konvergent gegen

$a \in X$ :  $\iff$  zu jeder Umgebung  $U$  von  $a$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U \quad \forall n \geq N \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, a) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$



**Bemerkung:** zeige wie früher, dass

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

wenn existent, eindeutig bestimmt ist:  $d(a, a') \leq d(a, x_n) + d(x_n, a')$

**Satz 16.3 :** Seien  $x_k, a \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt folgende Äquivalenz:

- (i)  $\|x_k - a\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , für ein  $p \in [1, \infty]$
- (ii) - " - für alle - " -
- (iii) Für jede Komponente  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = a^i$$

in  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** (i)  $\iff$  (ii) folgt aus

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

(i), (ii)  $\implies$  (iii). Mit  $p = 2$  folgt  $\sum_{j=1}^n |x_k^j - a_k^j|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , also  $\{x_k^j - a^j\}_{k \in \mathbb{N}}$  Nullfolge für  $j = 1, \dots, n$ .

(iii)  $\implies$  (ii) Wähle wieder  $p = 2$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle für  $j = 1, \dots, n$   $N_j$  mit  $|x_k^j - a^j| < \varepsilon \quad \forall k \geq N_j$ . Dann

$$\|x_k - a\|_2 \leq \sqrt{n} \varepsilon \quad \forall k \geq \max\{N_1, \dots, N_n\},$$

also  $\|x_k - a\|_2 \rightarrow 0$ . □

Der Satz sagt insbesondere, dass komponentenweise Konvergenz und Konvergenz in irgendeiner Norm gleichbedeutend sind.

**Satz 16.4 :** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann gilt:

$$A \subset X \text{ abgeschlossen} \iff$$

Ist  $\{x_k\}$  konvergente Folge mit Gliedern aus  $A$ , so ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in A$ .

**Beweis:** “ $\implies$ ”:

Wäre  $a \notin A$ , also  $a \in X - A$ , so gibt es  $\varepsilon > 0$  mit

$$B_\varepsilon(a) \subset X - A,$$

da  $X - A$  offen. Für  $n \geq N_\varepsilon$  ist  $x_n \in B_\varepsilon(a)$ , also  $x_n \notin A$ , Wsprr.!

“ $\impliedby$ ”:  
Zu zeigen:  $X - A$  offen

falls nicht  $\implies \exists x \in X - A$  mit  $B_\varepsilon(x) \not\subset X - A$  für alle  $\varepsilon$ , d. h.  $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$

wähle  $\varepsilon = 1/k$  und dazu  $x_k \in B_{1/k}(x) \cap A \implies$

$d(x_k, x) < 1/k \rightarrow 0$ , also  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ ;  $\{x_k\}$  ist Folge in  $A$ , nach Vor. folgt  $x \in A$ , Wsprr!

□

**Definition 16.7 :**  $(X, d)$  sei metrischer Raum.

(i)  $\{x_k\}$  heißt Cauchy-Folge in  $X$   $:\Leftrightarrow$   
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$  mit  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N_\varepsilon$

(Bem.:  $\{x_k\}$  konvergent  $\implies \{x_k\}$  C.F.)

(ii)  $(X, d)$  heißt vollständig  $:\Leftrightarrow$   
 jede Cauchy-Folge konvergiert

(iii) Vollständig normierte Vektorräume heißen Banachräume.

**Bemerkungen:**

1) als Nebenergebnis von Satz 16.7 werden wir sehen:

$(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum,  $\dim X < \infty$

$\implies X$  vollständig

2) für  $\dim X = \infty$  gilt das nicht!

$X = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig, } 2\pi\text{-periodisch} \right\}$ .

$\|f\|_{L^2} = \left( \int_0^{2\pi} |f|^2 dx \right)^{1/2}$  ist Norm auf  $X$ .

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodische Treppenfunktion  $\notin X$

$S_N(f) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ ,  $c_n =$  Fourier-Koeff. von  $f \implies |c_n| \leq K/|n|$  mit  $K$  geeignet.

Setze  $f(x) := \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-))$  in Sprungstellen  $\implies$

Satz 15.11, 12:  $\|S_N(f) - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ ,  $S_N(f)(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

gemäß  $\|S_N(f) - S_M(f)\|_{L^2} \leq \|S_N(f) - f\|_{L^2} + \|S_M(f) - f\|_{L^2}$  ist  $\{S_N(f)\}$  Cauchy-Folge in  $X$ .

Es gibt aber kein  $f^* \in X$  mit  $\|S_N(f) - f^*\|_{L^2} \rightarrow 0$ : falls doch  $\implies \|f^* - f\|_{L^2} = 0 \implies$

$$S_n(f^*) = S_n(f), \text{ d.h. } c_n^* = c_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

insbesondere gilt:  $|c_n^*| \leq K/|n|$

$$\xrightarrow[15.12, f^* \text{ stetig}]{} S_n(f^*) = S_n(f) \longrightarrow f^* \text{ gleichm\u00e4\u00dfig,}$$

also auch  $S_n(f)(x) \rightarrow f^*(x)$  f\u00fcr alle  $x$  und damit  $f(x) = f^*(x)$  Wsprr.!

**Satz 16.5 :**  $\mathbb{R}^n$  ist vollst\u00e4ndig bzgl. irgendeiner Norm  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Beschr\u00e4nkte Folgen, d.h.  $\sup_k \|x_k\|_p < \infty$  f\u00fcr ein (und damit f\u00fcr alle)  $p$ ,  
haben konvergente Teilfolgen.

**Beweis:** komponentenweise Argumentation, Vollst\u00e4ndigkeit von  $\mathbb{R}$ , Bolzano-W.

Details  $\longrightarrow$  \u00dcbung

□

**Definition 16.8 :** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum.

(i)  $\text{diam } A = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$  Durchmesser von A

(ii)  $A$  beschr\u00e4nkt  $\iff \text{diam } A < \infty$ .

**Bemerkungen:** 1)  $\text{diam } B_r(a) = 2r$  in normierten R\u00e4umen.

2)  $A$  beschr\u00e4nkt  $\iff \exists R > 0 : A \subset B_R(a)$

□

Der folgende Satz verallgemeinert das Intervallschachtelungsprinzip auf vollst\u00e4ndige metrische R\u00e4ume.

**Satz 16.6** : Cantor'scher Durchschnittssatz

Sei  $(X, d)$  vollständiger metrischer Raum,  $\{A_k\}$  eine Folge von Mengen mit

(i)  $A_k \supset A_{k+1}$ ,  $A_k \neq \emptyset$ ,  $A_k$  abgeschlossen

(ii)  $\text{diam } A_k \rightarrow 0$  bei  $k \rightarrow \infty$ .

Dann gibt es genau einen Punkt  $x$ , der in allen  $A_k$  liegt, d.h.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}.$$

**Beweis:** Für jedes  $n$  wähle  $x_n \in A_n$ .  $m \geq n \implies x_m \in A_n$  und daher  $d(x_n, x_m) \leq \text{diam } A_n$ , also  $\{x_n\}$  Cauchy-Folge. Sei  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Da  $A_n$  abgeschlossen ist und  $x_n \in A_k$ ,  $n \geq k$ , folgt die Beh.  $\square$

**Definition 16.9** : Sei  $X$  ein Vektorraum.

Zwei Normen  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_*$  auf  $X$  heißen äquivalent :  $\iff$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_* \leq \beta \|\cdot\|.$$

**Bemerkungen:** 1)  $(X, \|\cdot\|)$  Banachraum  $\iff (X, \|\cdot\|_*)$  Banachraum.  
2) Alle Normen  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent.

**Satz 16.7** : Je zwei beliebige Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent, d.h.

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  ist B-Raum bzgl. jeder Norm.

**Beweis:** Sei  $\|\cdot\|$  Norm auf  $\mathbb{R}^n$ .  $e_1, \dots, e_n =$  Standardbasis,

also  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \downarrow \Delta\text{-Ungl.} \\ \|x\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \max_{i=1}^n |x_i| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{=: \beta}, \end{aligned}$$

so dass  $\|x\| \leq \beta \cdot \|x\|_\infty$ .

Annahme: \*  $\forall \alpha > 0 \exists x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\|_\infty > \alpha \|x\|$ .

$\implies \forall k \in \mathbb{N} \exists x_k$  mit  $\|x_k\|_\infty > k \cdot \|x_k\|$

sei  $y_k := x_k / \|x_k\|_\infty \implies \|y_k\|_\infty = 1$  und

$$\|y_k\| < \frac{1}{k}$$

O.E. (Bolzano-W. für  $y_k$  und  $\|\cdot\|_\infty$ , vgl. 16.5) gelte  $\|y_k - y\|_\infty \rightarrow 0$  für ein  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|y\|_\infty = 1$  (hier geht die umgekehrte Dreiecksungl.  $|\|y\|_\infty - \|y_k\|_\infty| \leq \|y_k - y\|_\infty$  ein.)

Es folgt: (gemäß  $\|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_\infty$ .)

$$\|y\| \leq \|y - y_k\| + \|y_k\| \leq \beta \|y - y_k\|_\infty + \frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

also  $\|y\| = 0 \iff y = 0$ .

$y = 0$  widerspricht  $\|y\|_\infty = 1$ , \* ist falsch, d.h.  $\exists \alpha > 0$  mit  $\|\cdot\|_\infty \leq \alpha \|\cdot\|$ . □

Übung: zeige mit 16.7, dass im Falle  $\dim X < \infty$  alle Normen äquivalent sind.

**Bemerkung:**  $\dim X = \infty \implies$  zwei Normen sind i.a. nicht äquivalent.

$$X = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \right\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{[0,1]} |f|,$$

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

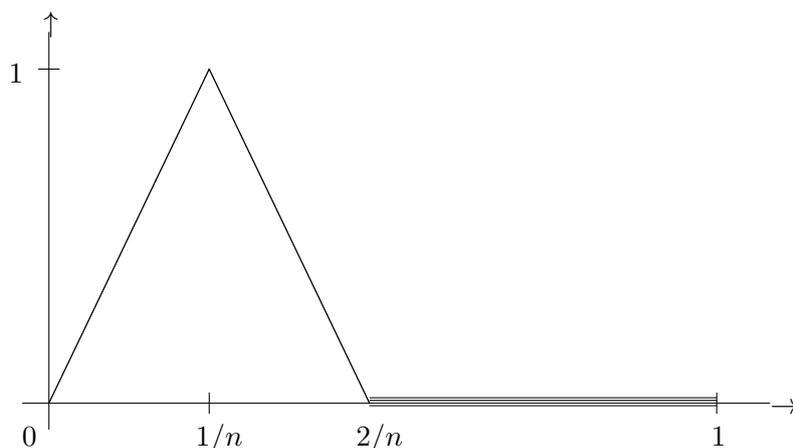
Da glm. Limiten stetiger Funktionen stetig sind, folgt:

$(X, \|\cdot\|_\infty)$  ist B-Raum\*

$(X, \|\cdot\|_1)$  ist dagegen nicht vollständig  $\implies$

$\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_1$  können nicht äquivalent sein!

Dies sieht man auch an folgendem Beispiel:



$$f_n \in X \quad \text{mit} \quad \|f_n\|_\infty = 1,$$

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

→ Übung: zeige \*; beweise:  $(\mathcal{R}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  ist B-Raum.

### Kompaktheit in metrischen Räumen

**Definition 16.10** : Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $A \subset X$ .

(i) Ein System  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  heißt offene Überdeckung von  $A$ , falls  $U_\alpha \subset X$  offen ist mit  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

(ii)  $A$  heißt kompakt :  $\iff$  aus jeder offenen Überdeckung kann man eine endliche Teilüberdeckung wählen, d.h. es gibt

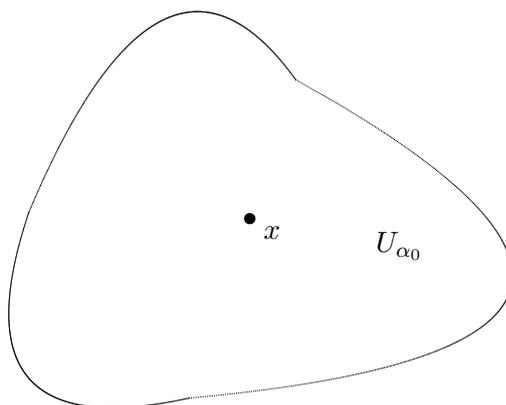
$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in I \quad \text{mit} \quad A \subset \bigcup_{\ell=1}^k U_{\alpha_\ell}$$

**Bemerkungen:** 1) Für Teilmengen von  $\mathbb{R}$  hatten wir eine abweichende Def., in Satz 12.2 haben wir gezeigt, dass “Überdeckungskompaktheit” auch Kompaktheit von Mengen in  $\mathbb{R}$  beschreibt.

2) Die folgenden Beispiele lassen sich teilweise einfacher mit dem Satz von Heine-Borel 16.10 erledigen.

a)  $\{x_n\}$  Folge in  $X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  kompakt.

Beweis:  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  offene Überdeckung  $\implies \exists \alpha_0 \in I$  mit  $x \in U_{\alpha_0}$  da  $U_{\alpha_0}$  offen ist, folgt:  $x_n \in U_{\alpha_0} \quad \forall n > N$  wähle  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$  mit  $x_n \in U_{\alpha_n} \quad \forall n \leq N$



Dann:  $A \subset \bigcup_{\ell=0}^N U_{\alpha_\ell}$ , d.h. es gibt endliche Teilüberdeckung.

b)  $X = \mathbb{R}$  mit Standardmetrik,  $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kompakt

Beweis:  $U_n := (\frac{1}{n+1}, \infty)$  offen mit  $\frac{1}{n} \in U_n \implies$

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Falls  $A$  kompakt  $\implies \exists n_1, \dots, n_\ell$  mit  $A \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_\ell}$ .

Sei O.E.  $n_1 < n_2 < \dots < n_\ell$ , so dass

$$U_{n_i} \subset U_{n_\ell}, i = 1, \dots, \ell.$$

Mithin:

$$A \subset U_{n_\ell},$$

aber  $\frac{1}{n_{\ell+1}} \in A$  und  $\notin U_{n_\ell}$ , Wsprr.!

c) In den folgenden Beispielen versehen wir  $\mathbb{R}^n$  mit einer beliebigen Norm. Da alle Normen äquivalent sind, hängen top. Begriffe nicht von der speziellen Wahl der Norm ab.

Kompakt sind die folgenden Mengen:

$$\text{Quader: } \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

mit  $a_i \leq b_i$  aus  $\mathbb{R}$

$$\text{Kugeln: } \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}, a \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

$$\text{Sphären: } \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}, a \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

(Begründung: via Definition - umständlich, aber gute Übung! - oder mit 16.10)

$$3) \text{ Es gilt: } \left| \begin{array}{l} (X, d) \text{ metr. Raum, } A_1, \dots, A_n \subset X \text{ kompakt} \\ \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ kompakt} \end{array} \right.$$

Man überlege sich Gegenbeispiele für nicht-endliche Vereinigungen.

□

**Satz 16.8 :** *Sei  $A$  kompakt im metrischen Raum  $(X, d)$ .*

*Dann ist  $A$  abgeschlossen und beschränkt.*

**Beweis:** Sei  $x \in X$  beliebig  $\implies X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x)$  insbesondere  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x)$ , so dass  $A \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(x)$ , also  $A \subset B_N(x)$ , d.h.  $\text{diam } A \leq 2N$ .

Dies zeigt Beschränktheit von  $A$ . Nachzuweisen bleibt:  $X - A$  ist offen.

Sei O.E.  $X - A \neq \emptyset$  und  $x \in X - A$ . Man setzt

$$U_n := \left\{ z \in X : d(z, x) > \frac{1}{n} \right\}$$

$$\implies U_n \text{ ist offen und } \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X - \{x\} \supset A$$

$$\implies A \subset \bigcup_{n=1}^N U_n = U_N \text{ für ein } N \text{ geeignet.}$$

Es gilt

$$B_{1/N}(x) \subset X - U_N = \left\{ z \in X : d(z, x) \leq 1/N \right\} \subset X - A,$$

folglich gibt es in  $X - A$  eine Kugel um  $x$ ,  $X - A$  ist also offen.

□

**Satz 16.9 :** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $A \subset X$  kompakt und  $B \subset A$  abgeschlossen. Dann ist  $B$  ebenfalls kompakt.

**Beweis:** Sei  $B \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ,  $U_\alpha \subset X$  offen. Gemäß Voraussetzung ist

$$(X - B) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X \supset A$$

offene Überdeckung von  $A$ , d.h.

$$(X - B) \cup U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \supset A \supset B.$$

Daraus folgt sofort  $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \supset B$ . □

Kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  lassen sich nun in sehr einfacher Weise beschreiben:

**Satz 16.10 :** (Heine - Borel)

*Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:*

*$A$  kompakt  $\iff A$  beschränkt und abgeschlossen*

(hier  $\mathbb{R}^n$  mit irgendeiner Norm.)

Der Satz von Heine - Borel ergibt sich aus der Folgencharakterisierung von Kompaktheit, die wiederum in jedem metrischen Raum richtig ist.

**Satz 16.11 :** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum und  $A \subset X$ . Dann gilt:

*$A$  kompakt  $\iff$  jede Folge  $\{x_n\} \subset A$  hat eine konvergente  
Teilfolge mit Limes ebenfalls in  $A$ .*

**Bem.:** Die Feststellung aus 16.11 war genau unsere frühere Definition kompakter Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Wir hätten also auch 16.11 als Definition für Kompaktheit in  $(X, d)$  nehmen können.

Def. 16.9 (Überdeckungskompaktheit) hat jedoch den Vorteil, dass man sie wörtlich für allgemeine topologische Räume  $(Y, \mathcal{T})$  formulieren kann, und in allgemeinen top. Räumen ist die Beschreibung der Kompaktheit durch Folgen nicht mehr möglich.

Beweis von 16.10: “  $\implies$  ” ist Satz 16.8

“  $\impliedby$  ” Sei  $A$  beschränkt und abgeschlossen. Man wähle  $\{x_n\} \subset A$  und benutzt 16.5 (sowie die Tatsache, dass alle Normen äquivalent sind), um eine konvergente Teilfolge  $\{x'_n\}$  zu bekommen. Nach 16.4 gehört deren Limes zu  $A$ . Mithin ist  $A$  kompakt nach 16.11.  $\square$

**Bemerkung:** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann kann man zeigen:

$$\left| \begin{array}{l} \dim X < \infty \iff \text{es gilt der Satz von Heine - Borel} \iff \\ \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \text{ ist kompakt} \end{array} \right.$$

Die Kompaktheit abgeschlossener Kugeln charakterisiert genau die Räume endlicher Dimension.

**Beweis von 16.11:**

“ $\implies$ ” Sei  $\{x_n\} \subset A$ . Falls eine konvergente Teilfolge existiert, so gehört deren Limes wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  (16.8) ebenfalls zu  $A$  (16.4). Nehmen wir daher an:

$\{x_n\}$  hat keine konvergente T.F.

Daher gilt: \*  $\{$  Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $\varepsilon_n > 0$  mit  $x_m \notin B_{\varepsilon_n}(x_n)$  für alle  $x_m \neq x_n$   $\}$ .

Andernfalls gibt es ein  $n_o \in \mathbb{N}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $x_m \neq x_{n_o}$  mit  $x_m \in B_\varepsilon(x_{n_o})$ , woraus man unschwer eine gegen  $x_{n_o}$  konvergente T.F. konstruiert.

Ebenso gibt es zu jedem  $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ein  $\varepsilon_x > 0$  mit

$$x_n \notin B_{\varepsilon_x}(x) \quad \forall n.$$

Dann folgt:  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n}(x_n) \cup \bigcup_{x \in A - \{x_m : m \in \mathbb{N}\}} B_{\varepsilon_x}(x)$ , also kommt man mit einer endlichen

T.Ü. aus.

Speziell folgt (da  $B_{\varepsilon_x}(x)$  für  $x \in A - \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$  kein Folgenglied enthält):

$$\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n=1}^N B_{\varepsilon_n}(x_n).$$

Gemäß \* folgt:  $\#\{x_m : m \in \mathbb{N}\} \leq N$ , die Folge nimmt nur endlich viele Werte an, hat also eine konvergente T.F., Wspr.!

“ $\Leftarrow$ ” Annahme  $\exists$  offene Überdeckung  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  von  $A$  ohne endliche T.Ü.

<u>Hilfsaussage:</u>	Unter den Vor. von “ $\Leftarrow$ ” gibt es zu jedem $r > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$
----------------------	--

Wäre die Hilfsaussage falsch, so könnte man ein  $r > 0$  finden, so dass für keine endliche Teilmenge  $\Omega$  von  $A$

$$A \subset \bigcup_{x \in \Omega} B_r(x)$$

gilt.

Sei dann  $x_1 \in A$  beliebig. Da  $A - B_r(x_1) \neq \emptyset$  gilt, gibt es darin ein  $x_2$ ,  $x_3$  wählt man in  $A - (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))$ ,  $x_{n+1}$  in  $A - \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$  usw. Es folgt  $d(x_i, x_j) \geq r$  für alle  $i \neq j$ , so dass  $\{x_i\}$  keine konvergente Teilfolge haben kann.

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wählt man nach der Hilfsaussage eine endliche Teilmenge  $\Omega_n$  von  $A$  mit  $A \subset \bigcup_{x \in \Omega_n} B_{1/n}(x)$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wird jede Kugel  $B_{1/n}(x)$ ,  $x \in \Omega_n$ , von endlich vielen  $U_\alpha$  überdeckt, so hätte man einen Widerspruch zur Annahme. Also gibt es mindestens eine Kugel  $B_{1/n}(x_n)$ ,  $x_n \in \Omega_n$ , die nicht von endlich vielen  $U_\alpha$  überdeckt wird.

Nach Voraussetzung für “ $\Leftarrow$ ” hat  $\{x_n\}$  eine in  $A$  konvergente Teilfolge, O.E. gelte bereits  $x_n \rightarrow x \in A$ . Gemäß

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

ist  $x \in U_{\alpha_0}$  für ein  $\alpha_0 \in I$ . Sei  $r > 0$  mit

$$B_r(x) \subset U_{\alpha_0} \quad (\text{offen!})$$

Für  $n \gg 1$  ist sicher  $d(x_n, x) < r/2$ , und verlangt man noch  $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$ , so solgt  $B_{1/n}(x_n) \subset U_{\alpha_0}$ . Also ist  $B_{1/n}(x_n)$  sogar in einer Menge aus der Überdeckung enthalten! Widerspruch zur Wahl von  $B_{1/n}(x_n)$ .  $\square$

Wir haben gesehen, dass metrische Räume in natürlicher Weise dazu geeignet sind, Konzepte wie Grenzwerte von Folgen, Kompaktheit von Mengen, etc., allgemein zu fassen und dadurch viele neue Anwendungen zu öffnen. Das Gleiche gilt für

### Stetigkeit von Funktionen

**Definition 16.11 :** (Folgenstetigkeit)

Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  heißt stetig in  $a \in X$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  gilt für jede Folge  $\{x_n\}$  in  $X$  mit  $x_n \rightarrow a$ .  
 $f$  heißt stetig auf  $X$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $a \in X$  stetig ist.

**Bemerkung:** strenggenommen muß man sagen      “stetig bzgl. der Metriken auf  $X, Y$ ”

**Satz 16.12 :** (alternative Beschreibung von Stetigkeit in  $a \in X$ )

Seien  $(X, d_1)$ ,  $(Y, d_2)$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $a \in X$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  stetig in  $a$
- (ii) zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$  (also  $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$  falls  $d(x, a) < \delta$ )
- (iii) zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(a)$  in  $Y$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $a$  in  $X$  mit  $f(U) \subset V$ .

Beweis:  $\rightarrow$  Übung

**Bemerkungen:**

- 1) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für jede Wahl von  $j \in \{1, \dots, n\}$  und Zahlen  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq j$ , sind die partiellen Abbildungen

$$g_j : \mathbb{R} \ni t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** Sei  $t_0 \in \mathbb{R} \implies f$  stetig in  $(a_1 \dots t_0 \dots a_n)$ ; da für jede Folge  $\{t_k\}$  mit  $t_k \rightarrow t_0$  offenbar

$$(a_1 \dots t_k \dots a_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (a_1 \dots t_0 \dots a_n)$$

in  $\mathbb{R}^n$  gilt, folgt  $f(a_1 \dots t_k \dots a_n) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(a_1 \dots t_o \dots a_n)$ .

□

Man sagt: Stetigkeit impliziert partielle Stetigkeit.

Die Umkehrung ist falsch:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$

i)  $f$  unstetig in  $(0, 0)$ : es ist  $f(x, x) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$

für  $x \neq 0$ , also  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \neq f(0, 0)$

ii)  $y$  fest ;  $g : \mathbb{R} \ni x \rightarrow f(x, y)$  ist stetig

Fall 1:  $y = 0 \implies g \equiv 0$

Fall 2:  $y \neq 0 \implies g(x) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = g(0)$

Also  $g$  stetig in  $x = 0$ , Stetigkeit auf  $\mathbb{R} - \{0\}$  klar!

iii)  $x$  fest; aus Symmetriegründen wie ii).

2) Mit Satz 16.3 und der Def. zeigt man:

$$f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig (in } a) \iff \text{jede Komponente } f^i : (X, d) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig (in } a)$$

3) Seien  $(X, d_1), (Y, d_2)$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  sei stetig. Dann ist für jede Teilmenge  $A$  von  $X$  die Einschränkung  $f|_A$  stetige Abbildung von  $(A, d_1)$  nach  $(Y, d_2)$ .

4) Beispiel:

$X := C^0([a, b]), d(f, g) := \|f - g\|_\infty$  (Banachraum)

$F : X \rightarrow X, F(f)(x) := \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b$

Es gilt:  $\|F(f)\|_\infty \leq (b - a) \|f\|_\infty$ , so dass  $F$  stetig bzgl. der Metrik  $d$  ist.

→ Übung: zeige Stetigkeit von  $G$  mit  $G(f)(x) = \int_a^x f^k(t) dt$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ .

□

**Satz 16.13 :** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  stetig
- (ii) Urbilder offener (abgeschlossener) Mengen in  $Y$  sind offen in  $X$ .

**Bemerkung:** für “Bilder” gilt das natürlich nicht, man wähle  $f \equiv \text{const}$  !

**Beweis:** “(i)  $\implies$  (ii)” sei  $V \subset Y$  offen,  $U := f^{-1}(V)$  und  $a \in U$ . Da  $V$  offen ist, gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ . Dazu berechnet man  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ .  $f(B_\delta(a)) \subset V$  heißt aber  $B_\delta(a) \subset f^{-1}(V)$ , also gibt es in  $U$  eine Kugel  $B_\delta(a)$ .

“ (ii)  $\implies$  (i) ” Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben; dann ist  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) =: U$  offen in  $X$  nach (ii) mit  $a \in U$ , folglich gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(a) \subset U$ , also  $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ , Behauptung folgt aus 16.12 (ii). □

**Bemerkung:** 16.13 (ii) kann man als Def. der Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen nehmen.

**Satz 16.14 :** (Rechenregeln)

Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume,  $V$  ein normierter Raum.

- (i)  $f, g : X \rightarrow V$  stetig  $\implies f + g, \lambda f : X \rightarrow V$  stetig
- (ii)  $V = \mathbb{R}$ , - ” -  $\implies f \cdot g$  stetig,  
und auch  $f/g$ , falls  $g(x) \neq 0$  für  $x \in X$
- (iii)  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  stetig  $\implies g \circ f : x \rightarrow Z$  stetig

**Beweis:** (i), (ii) wie früher z.B. mit Folgen

(iii)  $V \subset Z$  offen  $\implies g^{-1}(V)$  offen in  $Y \implies f^{-1}(g^{-1}(V))$  offen in  $X$

Es ist  $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$  .

□

**Beispiele:**1)  $X = \mathbb{R}^n$ Polynome in  $n$  Veränderlichen:  $I := \mathbb{N}_0^n$ ; setze

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ für } \alpha \in I, x \in \mathbb{R}^n$$

Seien für  $\alpha \in I$   $a_\alpha \in \mathbb{R}$  gegeben mit  $a_\alpha \neq 0$  für höchstens endlich viele  $\alpha$ . $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha$ , heißt Polynom in  $n$  Variablen.Da  $x \mapsto x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , auf  $\mathbb{R}^n$  stetig ist, folgt mit den Rechenregeln Stetigkeit von  $f$ .Rationale Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , also Quotienten  $f(x)/g(x)$ , sind dort stetig (und definiert), wo  $g(x) \neq 0$  ist.2) Seien  $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig; dann ist  $\langle f, g \rangle : X \rightarrow \mathbb{R}$  (Skalarprodukt) stetig3) Sei  $(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum. Dann ist die Norm  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  
denn  $\left| \|x\| - \|a\| \right| \leq \|x - a\|$ .

□

**Definition 16.12 :** Seien  $(X, d_1), (Y, d_2)$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ . $f$  heißt Lipschitz - stetig auf  $X$  :  $\Leftrightarrow$ 

$$\exists c \geq 0 : d_2(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_1(x, y) \text{ für}$$

alle  $x, y \in X$ . $\inf\{c \geq 0 : \dots\}$  heißt optimale Lipschitz Konstante,  $Lip(f)$ .**Beispiele:**0)  $f$  Lipschitz  $\implies f$  stetig1)  $(X, \|\cdot\|)$  normiert  $\implies \|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz mit  $Lip(\|\cdot\|) = 1$ 2) "der Abstand zu einer Menge ist Lipschitz"Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $\emptyset \neq M \subset X$  und

$$\rho(x) := \text{dist}(x, M) := \inf\{d(x, m) : m \in M\}.$$

Dann ist  $\rho$  Lipschitz auf  $X$ ,  $\text{Lip}(\rho) \leq 1$ .

Beweis: Seien  $x, y \in X$ . Wähle  $m, \tilde{m} \in M$  mit  $d(x, m) \leq \rho(x) + \varepsilon$ ,  $d(y, \tilde{m}) \leq \rho(y) + \varepsilon$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \rho(y) &\leq d(y, m) \leq d(y, x) + d(x, m) \leq \\ &d(x, y) + \rho(x) + \varepsilon \quad \implies \end{aligned}$$

$$\text{und analog } \left. \begin{aligned} \rho(y) - \rho(x) &\leq d(x, y) + \varepsilon \\ \rho(x) - \rho(y) &\leq d(y, x) + \varepsilon \end{aligned} \right\} \implies$$

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq d(x, y) + \varepsilon \implies \text{Beh., da } \varepsilon > 0 \text{ beliebig.}$$

□

**Satz 16.15** : Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $f : X \rightarrow Y$  sei linear.

Dann gilt die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i)  $f$  stetig
- (ii)  $f$  stetig in 0
- (iii)  $f$  ist Lipschitz

**Bemerkungen:**

- 1)  $\dim X = \infty \implies \exists$  unstetige lineare Abbildungen (Bspl.:  $X = C^1([0, 1])$ ,  $Y = C^0([0, 1])$  jeweils mit  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $A(f) := f'$  für  $f_n(x) := x^n : \|f_n\|_\infty = 1, \|Af_n\|_\infty = n \rightarrow \infty$ )
- 2) zeige  $\rightarrow$  Übung: jede lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig
- 3) Im Fall  $\dim X = \infty, Y = \mathbb{R}$ , kann man unstetige lin. Abb. mit dem Auswahlaxiom finden.

**Beweis von 16.5:** (i)  $\implies$  (ii) klar

(ii)  $\implies$  (iii) Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit

$$\|f(x)\| \leq \varepsilon, \|x\| \leq \delta$$

Sei  $z \neq 0$ . Dann ist  $\delta \cdot z/\|z\| =: x$  ein Vektor mit Länge  $\delta \Rightarrow$

$$\|f(\delta z/\|z\|)\| \leq \varepsilon \iff \|f(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\|,$$

und dies gilt auch für  $z = 0$ . Sind  $u, w \in X$ , so folgt

$$\|f(u) - f(w)\| = \|f(u - w)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|u - w\|,$$

also Lipschitz-Stetigkeit.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) klar! □

### Beispiel für Lipschitz-Stetigkeit

$X := C^0([a, b])$ ,  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz ;  $A : X \rightarrow X$  wird definiert durch  $A(f)(x) := \int_a^x \varphi(f(t)) dt$

Dann gilt:  $\text{Lip}(A) \leq \text{Lip}(\varphi)$ .

**Notation:**  $X, Y$  normierte Räume,  $A : X \rightarrow Y$  linear und stetig

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$$

heißt Operatornorm von  $A$ . Es gilt:  $\|A\| = \text{Lip}(A)$ .

Wie im Reellen definiert man

**Definition 16.13 :** (gleichmäßige Stetigkeit)

Seien  $(X, d_1), (Y, d_2)$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  heißt glm. stetig (bzgl.  $d_1, d_2$ )

:  $\iff$  zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$  für alle  $x, y \in X$  mit  $d_1(x, y) < \delta$ .

**Bemerkungen:** 1)  $\delta$  hängt nicht vom Punkt ab, nur von  $\varepsilon$  und  $f$ .

2)  $f$  Lipschitz auf  $X \implies f$  glm. stetig ( $\delta = \varepsilon/\text{Lip}(f)$ )

**Satz 16.16 :** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $X$  kompakt und

$f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

**Bemerkung:** Wir kennen die reelle Version 9.15, den dort geführten Beweis kann man wörtlich übernehmen, wenn man den Absolutbetrag  $|\cdot|$  durch die jeweilige Metrik ersetzt. Wir geben einen anderen Beweis, der die Definition der Überdeckungskompaktheit stärker berücksichtigt.

**Beweis von 16.16:**  $\varepsilon > 0$  gegeben; zu jedem  $x \in X$  wähle  $\delta_x > 0$  mit  $d_2(f(z), f(x)) < \varepsilon/2 \quad \forall z \in B_{\delta_x}(x)$  (Stetigkeit an jeder Stelle  $x$ ) offenbar:

$$X = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{1}{2} \delta_x}(x) \implies X \text{ kompakt}$$

$$X = \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{2} \delta_{x_j}}(x_j) \quad *$$

für gewisse Punkte  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Sei  $\delta := \frac{1}{2} \cdot \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$ .  
Seien dann  $x, \tilde{x} \in X$  mit  $d_1(x, \tilde{x}) < \delta$ . Nach \* ist  $x \in B_{\frac{1}{2} \delta_{x_j}}(x_j)$  für ein  $j$ , die Wahl von  $\delta$  liefert  $\tilde{x} \in B_{\delta_{x_j}}(x_j)$ . Damit gilt:  $d_2(f(x), f(\tilde{x})) \leq d_2(f(x), f(x_j)) + d_2(f(x_j), f(\tilde{x})) \underset{\text{s.o.}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ,  
was zu beweisen war.  $\square$

**Satz 16.17 :** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetige Abb. zwischen den metr. Räumen  $X$  und  $Y$ .

Dann sind Bilder kompakter Mengen  $K \subset X$  kompakt in  $Y$ .

**Beweis:** 1) Variante  $\rightarrow$  mit Folgenkompaktheit, vgl. An.I.

2) Variante: Sei  $K \subset X$  kpt und  $(V_\alpha)_{\alpha \in I}$  offene Überdeckung von  $f(K)$  in  $Y$ . Dann ist  $(f^{-1}(V_\alpha))_{\alpha \in I}$  offene Überdeckung von  $K$  in  $X$ , also für gewisse  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i}) \implies f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}.$$

$\square$

**KOROLLAR:** (Satz v. Max. u. Min.):

Sei  $X$  kompakter metr. Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  Max. und Min. an, d.h. es gibt  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  für alle  $x \in X$ .

Es gilt also:  $f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in X\}$ ,

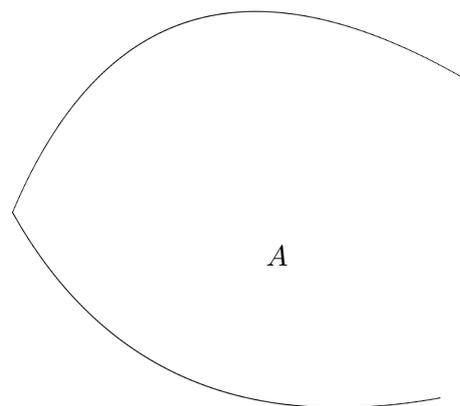
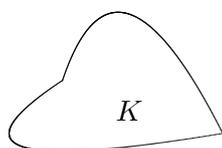
$$f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

**Beweis:**  $f(X)$  ist kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , hat also ein Maximum und ein Minimum.  $\square$

Anwendung:

\* Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subset X$  abgeschlossen  
 und  $K$  kompakt in  $X$ . Gilt  $A \cap K = \emptyset$ , so folgt  
 $\text{dist}(A, K) > 0$ .



hierbei:

$$\left| \begin{array}{l} \text{dist}(M, N) := \inf \{d(m, n) : m \in M, n \in N\} \\ \text{(Abstand von } M \text{ und } N\text{)} \end{array} \right.$$

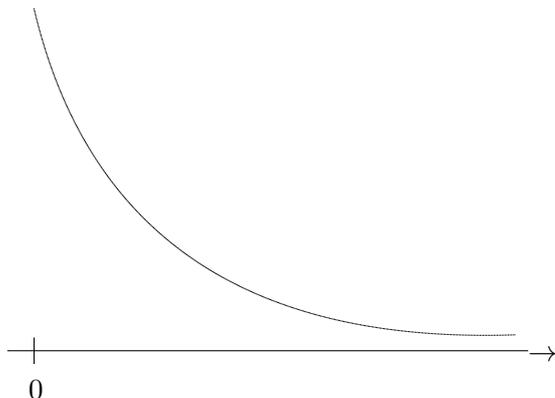
**Beweis von \*:** Die Abbildung  $\varphi : x \mapsto \text{dist}(x, A)$  ist (Lipschitz) stetig, da  $K$  kompakt ist, gibt es  $x_0 \in K$  mit

$$\varphi(x_0) = \inf_K \varphi = \text{dist}(A, K)$$

Da  $A \cap K = \emptyset$  und  $x_0 \notin A$  ist, gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x_0) \cap A = \emptyset$ . Es folgt  $\text{dist}(x_0, A) \geq \varepsilon$ , also  $\varphi(x_0) \geq \varepsilon > 0$ .  $\square$

**Bemerkungen:**

- 1) anderer Beweis: nehme  $\text{dist}(A, K) = 0$  an und argumentiere mit Folgen.
- 2)  $\text{dist}(M, N)$  ist keine Metrik auf  $\mathcal{P}(X)$ , denn aus  $M \subset N$  folgt  $\text{dist}(M, N) = 0$ , so dass man umgekehrt aus dem Verschwinden von  $\text{dist}(M, N)$  nicht  $M = N$  ablesen kann.
- 3)  $|A, B \text{ nur abgeschlossen, } A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow \text{dist}(A, B) > 0|$



$A = x$ -Achse ,  $B = \text{Graph von } 1/x, x > 0$   
 ( $B = \{(x, 1/x) : x > 0\}$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  ! )

□

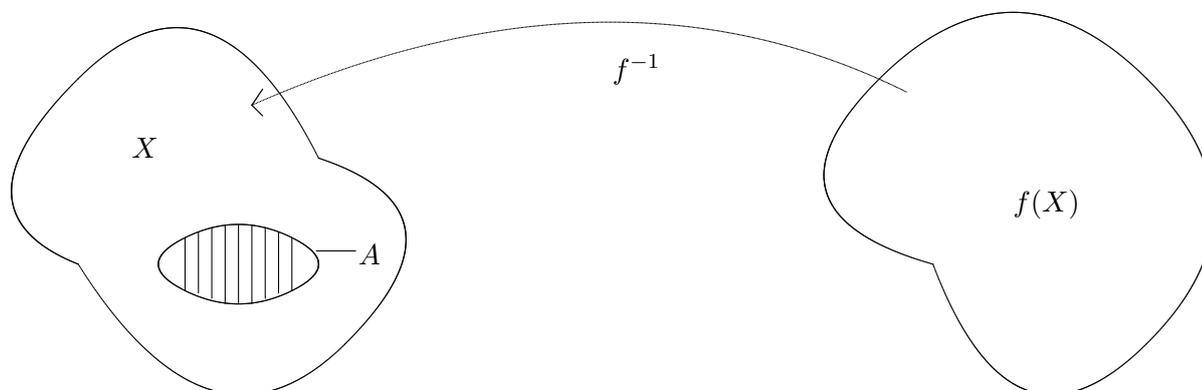
Zum Abschluß befassen wir uns mit

**Satz 16.18 :** (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

*Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig und injektiv.  
 Ist  $X$  kompakt, so ist  $f^{-1}$  stetige Abbildung zwischen dem metrischen Raum  $f(X)$   
 und  $X$ .*

**Beweis:** Sei  $Z = f(X)$ ;  $Z$  ist kompakt als Bild des kompakten Raumes  $X$ . Sei  $A \subset X$  abgeschlossen.

Setzen wir  $g := f^{-1}$ ,



so ist zu zeigen:

$g^{-1}(A)$  abgeschlossen im metr. Raum  $f(X)$ .

Dann folgt die Stetigkeit von  $g$  mit Satz 16.13.

Es ist

$$g^{-1}(A) = f(A) \text{ kompakt in } Y,$$

da  $A \subset X$  abgeschlossen (und somit kompakt) und  $f$  stetig. Speziell ist  $f(A)$  abgeschlossen in  $Y$  und dann natürlich auch im metr. Raum  $f(X)$ .  $\square$

**Definition 16.14 :** Seien  $X, Y$  metr. Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv. Ist

$f^{-1} : Y \rightarrow X$  auch stetig, so nennt man  $f$  einen **Homöomorphismus** und sagt:  $X$  und  $Y$  sind **homöomorph**.

**Beispiele:**

i)  $X$  kompakt,  $f : X \rightarrow Y$  stetig und injektiv  $\implies X$  und  $f(X)$  sind homöomorph

$$\text{ii) } \begin{cases} X = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, Y = \mathbb{R}^n \\ f : X \rightarrow Y, f(x) = \frac{1}{1-|x|} x, \text{ ist Homöomorphismus,} \\ f^{-1} : Y \rightarrow X, f^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|} z. \end{cases}$$

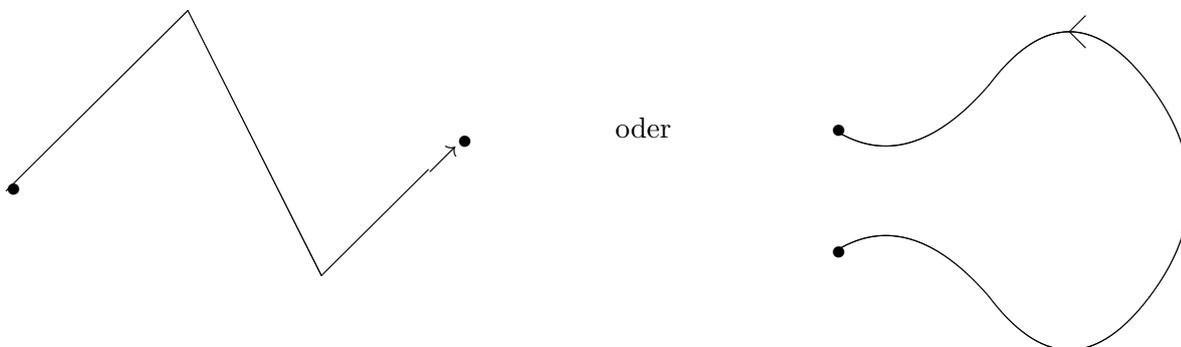
□

Wie kann man metrische Räume wie  $[0, 1]$  und etwa  $[-1, 0] \cup [1, 2]$  unterscheiden? Dazu dient der Begriff des Zusammenhangs.

**Definition 16.15 :** Sei  $X$  ein metrischer Raum.

- (i) Ein Weg in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ).  $\gamma(a)$  bzw.  $\gamma(b)$  heißt Anfangs- bzw. Endpunkt von  $\gamma$ ,  $\gamma$  heißt geschlossen, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .
- (ii) Der Raum  $X$  heißt wegzusammenhängend, falls es zu beliebigen  $x, y \in X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.

**Bemerkungen:** 1)  $[0, 1]$  ist wegzusammenhängend,  $[-1, 0] \cup [1, 2]$  dagegen nicht.  
2) Bei "Wegen" oder Kurven denkt man an "schöne" Bilder wie etwa



Das muß aber nicht so sein:

→ Übung: Es gibt stetige Kurven  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma([0, 1]) = [0, 1]^2$

Solche flächenfüllenden Kurven heißen Peano - Kurven.

**Satz 16.19 :** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $X$

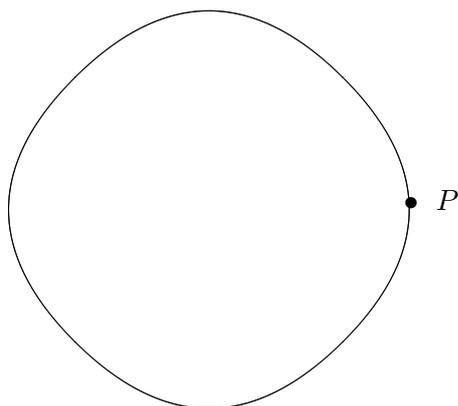
und  $Y$ . Ist  $A \subset X$  wegzusammenhängend, so auch  $f(A)$ .

**Beweis:** Seien  $f(a), f(b) \in f(A)$ ,  $a, b \in A$ . Dann gibt es  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  mit  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ ,  $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$  ist dann Weg in  $f(A)$  von  $f(a)$  nach  $f(b)$ .  $\square$

→ Übung:  $A \subset \mathbb{R}$  wegzusammenhängend  $\iff$   $A$  Intervall.

**Satz 16.20 :**  $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \cdot |z| = 1\}$  ist nicht homöomorph zu einem Intervall  $\subset \mathbb{R}$ .

**Beweis:** (indirekt) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall und  $f : I \rightarrow S^1$  Homöomorphismus. Sei  $x_0 \in I$  beliebig,  $P = f(x_0)$  und  $f_0 : I - \{x_0\} \rightarrow S^1 - \{P\}$



dann:  $f_0$  ist Homöom.,  $S^1 - \{P\}$  wegzshgd.

$\xRightarrow[16.19]{} I - \{x_0\}$  wegzshgd.

Aber (da  $x_0$  innerer Punkt) :  $I - \{x_0\} = I_1 \cup I_2$  mit zwei Intervallen  $I_1, I_2$ , wobei  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , also  $I - \{x_0\}$  nicht wegzshgd.  $\square$

Mit einem analogen Argument zeigt man:

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  stetig und surjektiv  $\implies$   $f$  nicht injektiv

für weitere Informationen:

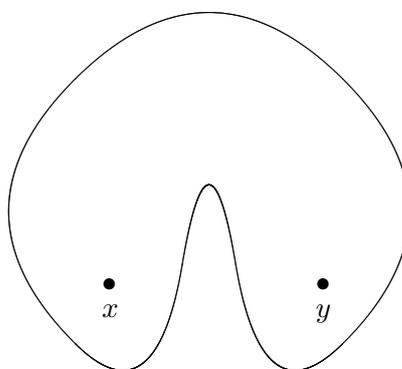
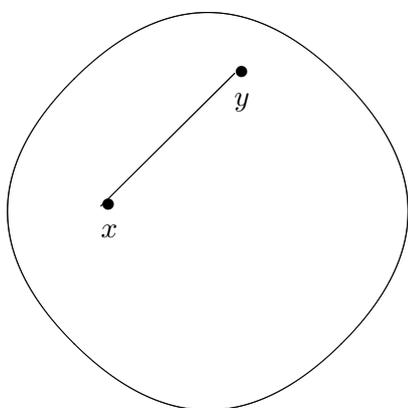
H. Schubert, Topologie Teubner Verlag  
 F. Hirzebruch - W. Schadau, Einführung in die Funktionalanalysis BI

□

Wir werden jetzt wieder konkreter und betrachten noch kurz Konvexe Mengen in  $\mathbb{R}^n$ :

**Definition 16.16** :  $M \subset \mathbb{R}^n$  konvex  $:\Leftrightarrow$  mit  $x, y$

gehört auch die Strecke von  $x$  nach  $y$  zu  $M$



nicht konvex!

### Bemerkungen:

1) in Formeln sagt die Def.:  $tx + (1-t)y \in M$  für alle  $0 \leq t \leq 1$ ,  $x, y \in M$ .

2) Dies ist äquivalent zu (warum?)  $\sum_{j=1}^L t_j x_j \in M$  für alle  $L \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_L \in M$ ,

$$0 \leq t_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^L t_j = 1$$

3) Es gilt:  $M_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , konvex in  $\mathbb{R}^n \implies \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$  konvex. Über Vereinigungen kann man natürlich nichts sagen.

4) Konvexität hat nichts mit irgendeiner Metrik oder Norm zu tun.

### Beispiele:

(i) (affine) Unterräume sind konvex

(ii) Halbräume  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq c\}$  mit  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$  sind konvex

(iii)  $\|\cdot\|$  beliebige Norm  $\implies B_R(a)$  und  $\overline{B}_R(a)$  konvex.

(Seien etwa  $x, y \in \overline{B}_R(a)$  und  $0 \leq t \leq 1 \implies \|(1-t)x + ty - a\| =$

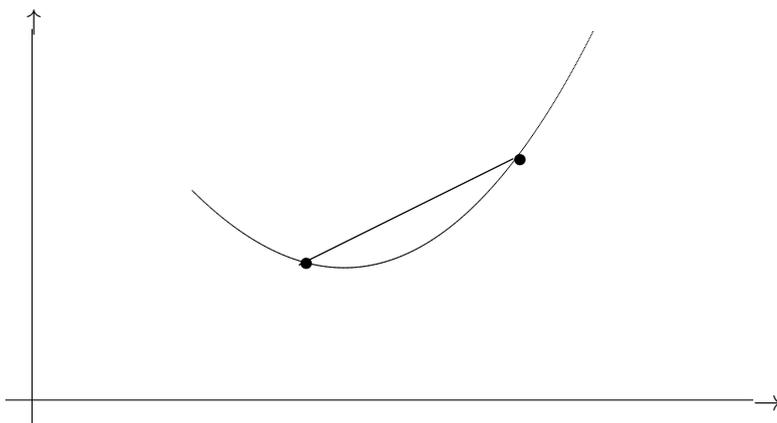
$$\|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| \leq (1-t)R + tR =$$

$$R \implies (1-t)x + ty \in \overline{B}_R(a).$$

**Definition 16.17 :** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex.  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine konvexe Funktion, falls

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle  $x, y \in K$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .



**Bemerkungen:**

1) streng konvex, konkav .....

2)  $f$  konvex  $\iff f\left(\sum_{i=1}^L t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^L t_i f(x_i) \dots\dots$

3)  $f$  konvex  $\iff \{x \in K : f(x) \leq c\}$  konvex für jedes  $c$ .

$\longrightarrow$  Übung: Beweis von

**Satz 16.21 :** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  konvex und offen. Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, so auch stetig.

□

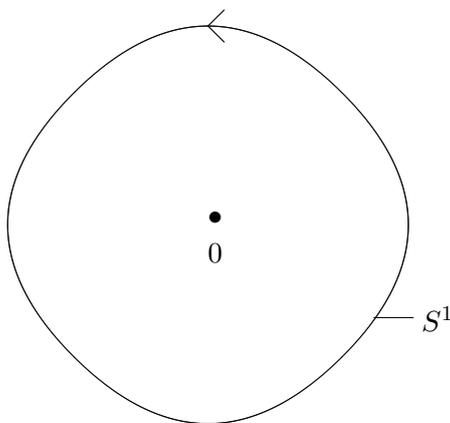
## §17

# Differenzierbare Kurven

Unter einer Kurve in  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir zunächst einen Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , also eine stetige Abbildung  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Beispiele:**

- (1)  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = e^{it}$ , beschränkt die 1 - Kreislinie im math. positiven Sinn

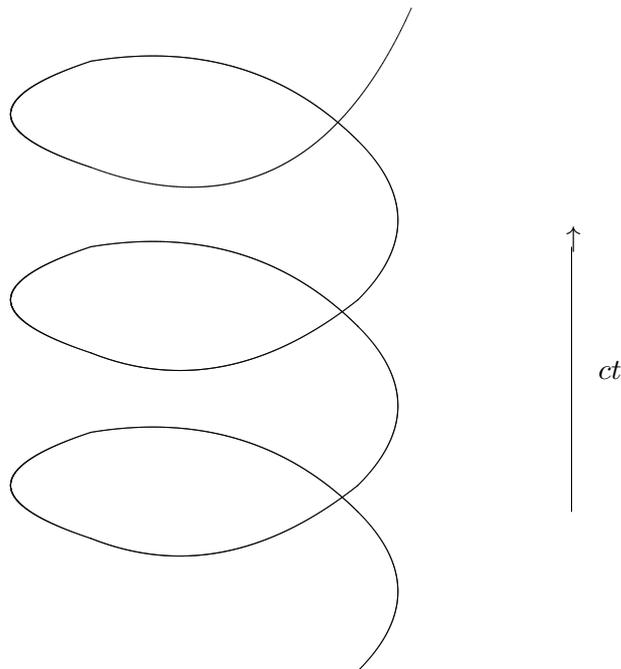


- (2) für  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$  sei  $\alpha_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha_k(t) = e^{ikt}$ . Auch hier: Bild  $\alpha_k = S^1$

Achtung: man muß unterscheiden zwischen einer Kurve als Abbildung und der Punktmenge, die man als Bild dieser Abbildung bekommt! Wir verstehen unter "Kurve" die Abbildung (Parametrisierung) und nicht die zugehörige Punktmenge, deshalb sind  $\alpha$  und  $\alpha_k$  ( $k \neq 1$ ) verschiedene Kurven oder verschiedene Parametrisierungen derselben Punktmenge.

- (3) Graphenkurven:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\implies \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, f(t))$  zugehörige Graphenkurve

(4) Schraubenlinie:  $r > 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (r \cos t, r \cdot \sin t, ct)$



Vorstellung:  $t =$  Zeit,  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$  Ort zur Zeit  $t$ ,  $\gamma$  beschreibt eine Bahnkurve.

**Definition 17.1** : (differenzierbare Kurven)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve.  $\gamma$  heißt (stetig) differenzierbar  
 $:\Leftrightarrow$  alle Komponentenfunktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  sind (stetig) differenzierbar.

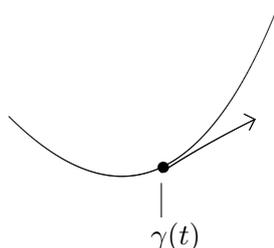
$\gamma'(t) := (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  : Tangentenvektor von  $\gamma$  zum Parameterwert  $t$ .

$\rightarrow$  Übung:  $e \in \mathbb{R}^n$  ist genau dann Tangentenvektor an  $\gamma$  zur Zeit, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (\gamma(t+h) - \gamma(t)) - e \right\| = 0$$

für irgendeine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist.

Also:  $\gamma'(t) = \underline{\text{Grenzlage von Sekantensteigungen}}$

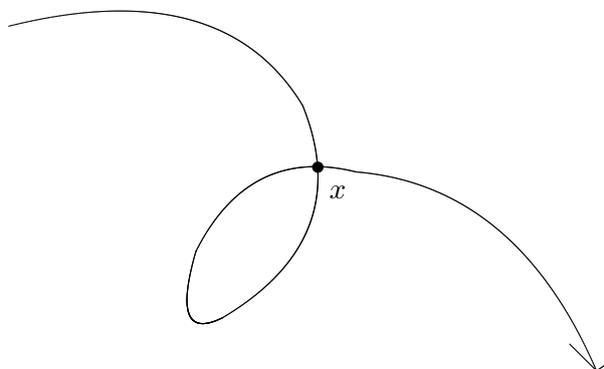


Physikalische Vorstellung:  $\gamma'(t) = \underline{\text{Geschwindigkeitsvektor}}$ .

### Bemerkungen und Beispiele:

- 1) Doppelpunkte:  $x \in \text{Bild}(\gamma)$  heißt Doppelpunkt, wenn  $x$  mindestens 2 mal durchfahren wird, d.h.

$$\exists t_1 \neq t_2 \quad \text{mit} \quad x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2);$$



$\gamma$  doppelpunktfrei  $\iff$  die Parametrisierung  $\gamma$  ist injektiv.

Für  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = e^{ikt}$ ,  $k \in \mathbb{Z} - \{1\}$  sind alle Punkte  $\in S^1$  Doppelpunkte,

für  $k = 0$  ist  $\gamma$  konstant.

- 2) i)  $\gamma(t) = (t, f(t))$  mit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar  $\implies$

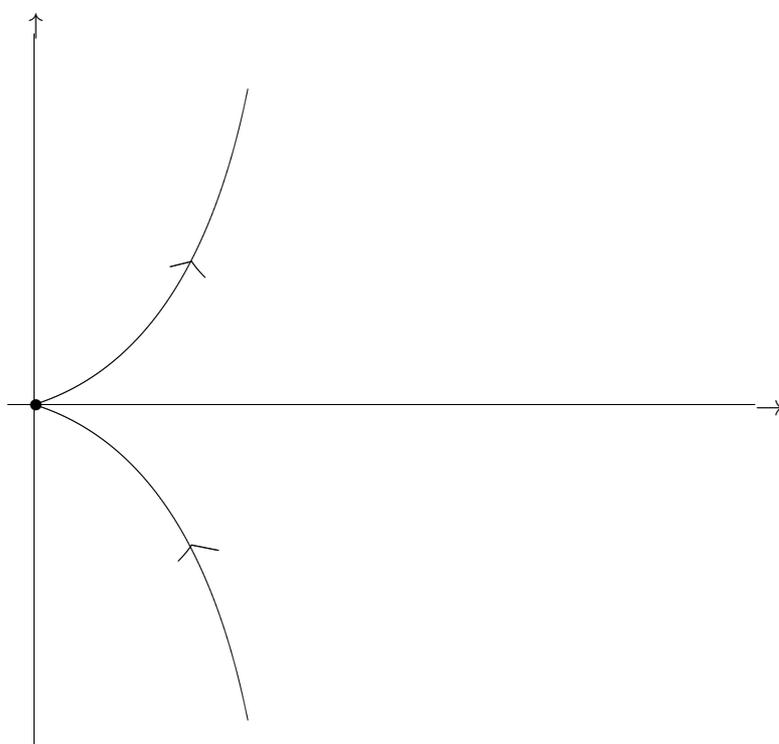
$$\gamma'(t) = (1, f'(t)), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2} \quad (\text{Eukl. Norm})$$

$$\text{ii) } \gamma(t) = e^{ikt}, \quad \gamma'(t) = k e^{ikt} \quad \implies \quad |\gamma'(t)| = |k|$$

D.h.: je größer  $|k|$  wird, um so schneller durchläuft man  $S^1$ .

3) Die Neil'sche Parabel zeigt:

|  $C^1$  - Kurven  $\gamma$  können Spitzen haben, verlaufen also i.a. nicht glatt.



$$\gamma(t) := (t^2, t^3)$$

$$\gamma(\mathbb{R}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \pm x^{3/2} \right\}$$

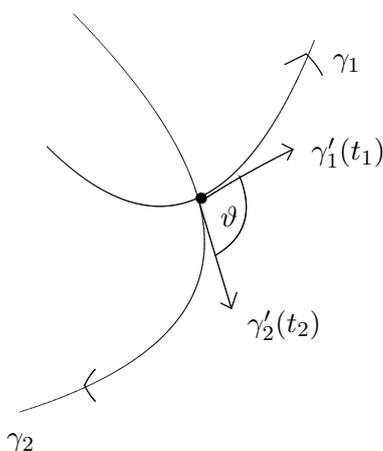
Es gilt  $\gamma'(0) = (0, 0)$ , d.h. in der Spitze verschwindet der Geschwindigkeitsvektor.

**Definition 17.2 :** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -Kurve.  $\gamma$  heißt regulär, falls  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

Sind  $\gamma_1, \gamma_2$  reguläre Kurven mit der Eigenschaft

$$\text{Bild}(\gamma_1) \cap \text{Bild}(\gamma_2) \neq \emptyset,$$

so kann man in jedem gemeinsamen Punkt  $x$  den Schnittwinkel definieren:



Sei  $x = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ ; Schnittwinkel  $\vartheta =$  Winkel zwischen den Vektoren  $\gamma'_1(t_1), \gamma'_2(t_2)$ .

$$\cos \vartheta = \left\langle \frac{\gamma'_1(t_1)}{|\gamma'_1(t_1)|}, \frac{\gamma'_2(t_2)}{|\gamma'_2(t_2)|} \right\rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle = \text{Eukl. Skalarprodukt.} \quad \square$$

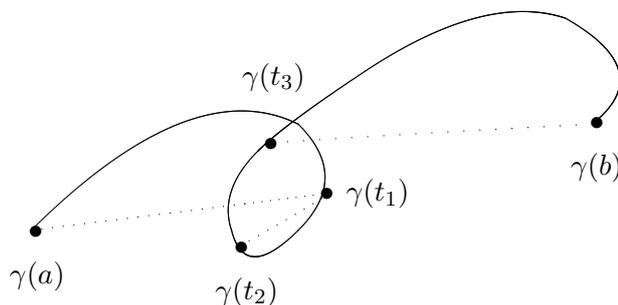
Ein wichtiger Begriff ist die Länge von Kurven.

**Definition 17.3 :**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetige Kurve. Ist  $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$

irgendeine Zerlegung von  $[a, b]$ , so heißt

$$L(Z) := \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

die Länge des zu  $Z$  und  $\gamma$  gehörenden Streckenzugs gemessen bzgl. der Norm  $\|\cdot\|$ .



$\gamma$  heißt rektifizierbar mit Länge  $L > 0$  (gemessen bzgl.  $\|\cdot\|$ )

$:\Leftrightarrow$  zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit  $|L(Z) - L(Z')| < \varepsilon$  für alle Zerlegungen  $Z$  mit Feinheit  $< \delta$ .

**Bemerkungen:**

- 1)  $Z'$  feiner als  $Z \implies L(Z) \leq L(Z')$

Daraus folgt: 
 $\gamma$  rektifizierbar  $\Leftrightarrow \sup \{L(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} < \infty$ .  
 In diesem Fall ist die Länge von  $\gamma = \sup \{L(Z) : \dots\}$ .

- 2) An dieser Beschreibung der Rektifizierbarkeit erkennt man auch:

Rektifizierbarkeit von  $\gamma$  ist unabhängig von der speziellen Norm, nur die Länge hängt (natürlich) davon ab, wie man  $\mathbb{R}^n$  normiert.

- 3) Offenbar gilt: ( $\rightarrow$  Übung)

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ rektifizierbar} \iff \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \text{BV}([a, b]).$$

□

**Satz 17.1 :** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig diff'bar,  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$ .

Dann gilt für die Länge  $L$  von  $\gamma$  bzgl.  $\|\cdot\|$

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Für die Euklidische Metrik folgt speziell

$$L = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n (\gamma'_i(t))^2 \right)^{1/2} dt.$$

$C^1$  - Kurven sind deshalb rektifizierbar.

Wir zeigen zuerst ein

**LEMMA:** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$  - Kurve. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$\left\| \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{t_1 - t_2} - \gamma'(t_i) \right\| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2$$

für alle  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ,  $0 < |t_1 - t_2| \leq \delta$ .

**Beweis:**  $n = 1$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.  $\gamma'$  ist glm. stetig auf dem Kompaktum  $[a, b]$ , also  $\exists \delta > 0$  mit

$$(1) \quad |\gamma'(t) - \gamma'(s)| \leq \varepsilon \quad \forall |t - s| \leq \delta.$$

Seien  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ,  $0 < |t_1 - t_2| \leq \delta$ .  $\xrightarrow{\text{MWS}}$  es gibt  $s$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  mit

$$\frac{1}{t_1 - t_2} (\gamma(t_1) - \gamma(t_2)) = \gamma'(s).$$

Also:

$$\left| \frac{1}{t_1 - t_2} (\gamma(t_1) - \gamma(t_2)) - \gamma'(t_i) \right| = \left| \gamma'(s) - \gamma'(t_i) \right| \stackrel{(1)}{\leq} \varepsilon$$

denn  $|t_i - s| \leq |t_1 - t_2| \leq \delta$ . Das ist die Beh. für  $n = 1$ .

$n > 1$ : Es gibt ein  $c > 0$  mit  $\|x\| \leq c \cdot \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t_1 - t_2} (\gamma(t_1) - \gamma(t_2)) - \gamma'(t_i) \right\| \leq \\ & c \cdot \max \left\{ \left| \frac{1}{t_1 - t_2} (\gamma_j(t_1) - \gamma_j(t_2)) - \gamma'_j(t_i) \right| : j = 1, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

Auf  $\gamma_j$  kann man den ersten Beweisteil anwenden. □

**Beweis v. Satz 17.1:** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben; nach Satz 12.7 (Approximation des Integrals durch Riemann'sche Summen) existiert dazu  $\delta > 0$  mit:

$$(1) \quad \left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|\gamma'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon$$

für jede Zerlegung  $Z = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$  der Feinheit  $\leq \delta$ .

Nach dem Lemma gibt es  $\delta^*$  (o.E.  $\leq \delta$ ) mit

$$(2) \quad \left\| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left( \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right) - \gamma'(t_i) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für jede Zerlegung  $\{t_0 < \dots < t_\ell\}$  mit Feinheit  $\leq \delta^*$ . Ist nun  $\{t_0 < \dots < t_m\}$  beliebige Zerlegung  $Z$  mit Feinheit  $\leq \delta_*$ , so folgt:

$$\begin{aligned} & \left| L(Z) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \\ & \left| \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^m \|\gamma'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| \\ & + \left| \sum_{i=1}^m \|\gamma'(t_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \stackrel{(1)}{\leq} \\ & \varepsilon + \sum_{i=1}^m \left\| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left( \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right) - \gamma'(t_i) \right\| (t_i - t_{i-1}) \stackrel{(2)}{\leq} \\ & \varepsilon + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Beispiele:** (immer bzgl. der Euklidischen Norm)

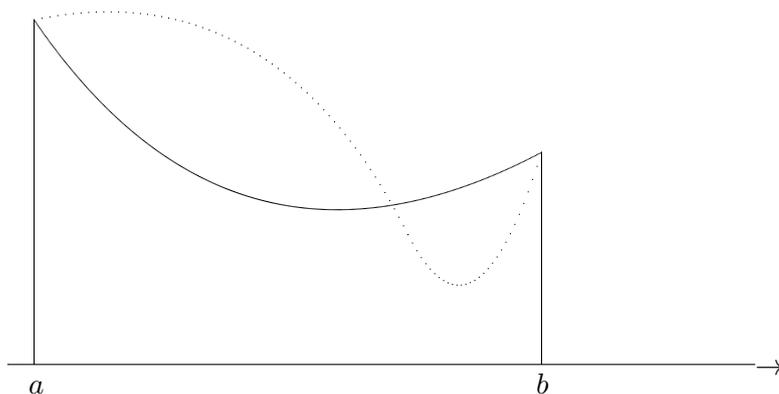
$$(1) \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{Länge} = \int_0^{2\pi} |i e^{it}| dt = 2\pi \quad (\text{Umfang des 1-Kreises})$$

$$\gamma_k(t) = e^{ikt}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{Länge} \quad \gamma_k = \int_0^{2\pi} |ki e^{ikt}| dt = |k| \cdot 2\pi$$

$$(2) \quad f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad C^1\text{-Kurve, } \gamma(t) := (t, f(t)) \implies L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Variationsprobleme: finde unter allen  $f$  mit  $f(a), f(b)$  fixiert diejenige Funktion, für die  $L(\gamma)$  minimal wird.

Lösung: Gerade



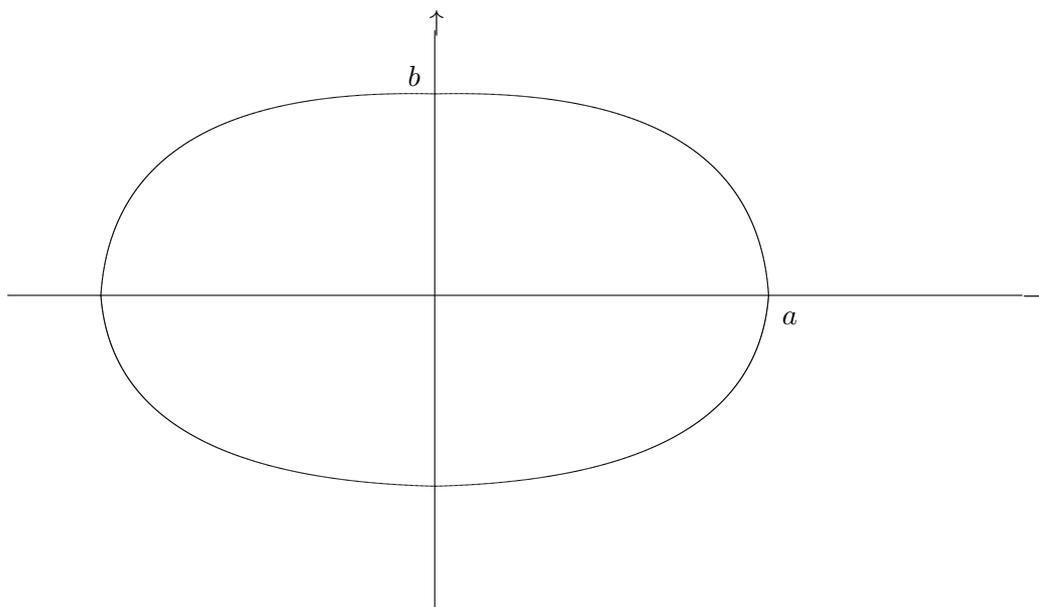
(3) Schraubenlinie:  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, c \cdot t)$  mit  $r > 0, c \neq 0,$

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c) \implies |\gamma'(t)| = \sqrt{r^2 + c^2}, \text{ also } L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r^2 + c^2} dt =$$

$$\sqrt{r^2 + c^2} \cdot (b - a).$$

(4) Elliptische Integrale:

für  $a, b > 0$  beschreibt  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  eine Ellipse mit Halbachsen  $a, b$ .



$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t), |\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \implies$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

läßt sich nicht elementar ausrechnen (via Stammfunktion).

□

**Definition 17.4 :** Ist  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve so heißt die Punktmenge

$$\text{Bild}(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} \quad \text{die Spur von } \gamma \text{.}$$

**Beispiel:**  $\gamma_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_k(t) = e^{ikt}, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$  hat Spur  $S^1$ , d.h. die  $\gamma_k$  sind verschiedene Parametrisierungen derselben Punktmenge.

**Definition 17.5 :** (Parameterwechsel)

i) Seien  $I, J$  Intervalle  $\subset \mathbb{R}$ .  $\sigma \in C^k(I, J)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , heißt  $C^k$ -Parametertransformation, wenn  $\sigma : I \rightarrow J$  bijektiv mit  $\sigma^{-1} \in C^k(J, I)$ .

$$\sigma \text{ orientierungstreu} \iff \sigma \text{ streng wachsend}$$

$$\sigma \text{ orientierungsumkehrend} \iff \sigma \text{ streng fallend.}$$

ii) Ist  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve und  $\sigma$  eine Parametertransformation  $I \rightarrow J$ , so heißt die neue Kurve  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\beta := \gamma \circ \sigma$ , Umparametrisierung von } \gamma.

**Bemerkungen:**

1) Spur  $(\gamma) = \text{Spur}(\gamma \circ \sigma)$

2)  $\sigma$   $C^k$ -Parametertransf.,  $k \geq 1$ ; dann  $\sigma' \neq 0$  und:

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma \text{ orientierungstreu} \iff \sigma'(t) > 0 \text{ überall} \\ \sigma \text{ orientierungsumkehrend} \iff \sigma'(t) < 0 \text{ überall.} \end{array} \right.$$

3)  $\gamma$  reguläre Kurve,  $\sigma$   $C^k$ -Parametertransf.,  $k \geq 1 \implies \gamma \circ \sigma$  reguläre Kurve.

Für die Länge gilt bei Umparametrisierung  $L(\gamma) = L(\gamma \circ \sigma)$ , d.h.  $L(\cdot)$  ist invariant gegen Parameterwechsel.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei  $C^1$ -Kurve, also  $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ .  $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$  sei  $C^1$ -Parametertransformation,  $\beta := \gamma \circ \sigma$  hat Länge  $L(\beta) = \int_c^d \left\| \frac{d}{dt} (\gamma \circ \sigma) \right\| dt = \int_c^d \|\gamma'(\sigma(t))\| \cdot |\sigma'(t)| dt$ .

Sei  $\sigma$  orientierungsumkehrend  $\implies (\sigma(c) = b, \sigma(d) = a \text{ und })$

$$L(\beta) = - \int_c^d \sigma'(t) \|\gamma'(\sigma(t))\| dt = \int_{\tau=\sigma(t)}^a \|\gamma'(\tau)\| d\tau = L(\gamma).$$

$$- \int_b^a \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| d\tau = L(\gamma).$$

Für Tangentenvektoren gilt die Umrechnungsformel

$$\beta'(t) = \sigma'(t) \gamma'(\sigma(t)),$$

d.h. es ist nicht  $\beta'(t) = \gamma'(\sigma(t))$ .

Umparametrisierung nach der Bogenlänge:

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei reguläre  $C^1$ -Kurve mit Länge  $L$ .

Man setzt:

$$\begin{cases} \sigma : [a, b] \longrightarrow [0, L], \\ \sigma(t) := \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds \end{cases}$$

$\implies \sigma$  ist  $C^1$ -Parametrisierung mit

$$\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$$

$\implies \sigma$  orientierungserhaltend

Man nennt:

$$\begin{cases} \beta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \beta := \gamma \circ \sigma^{-1} \end{cases}$$

die Umparametrisierung von  $\gamma$  nach der Bogenlänge. Es gilt:

$$\beta'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t), \quad t = \sigma^{-1}(s),$$

d.h.  $\|\beta'\| \equiv 1$ .

$\longrightarrow$  Übung: 1) für ebene Kurven definiere Krümmungen, - vektor, - kreis und rechne Beispiele.  
2)  $L(\gamma)$  für gewisse  $\gamma$

## 22

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung *der Ordnung*  $k \geq 1$  hat die Form

$$(*) \quad F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)\right) = 0$$

mit **gegebener** Funktion  $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , hierbei bezeichnet  $I \subset \mathbb{R}$  ein **offenes** Intervall. Es handelt sich also um eine Relation zwischen  $x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)$  auf  $I$ .

**gesucht** : eine  $k$ -mal diff'bare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $(*)$  gilt für alle  $x \in I$ .

**Beispiele :**

(i)  $y(x) = e^x$  erfüllt  $y'(x) = y(x)$ , d.h. mit  $F(x, \alpha, \beta) := \beta - \alpha$  gilt:  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ .

(ii) Die Funktion  $y(x) = \sin x$ , bzw.  $y(x) = \cos x$  erfüllen  $y''(x) = -y(x)$  auf  $\mathbb{R}$

hier:  $F(x, u, v, w) := w + u \implies F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$ .

In diesen Beispielen hängt  $F$  **nicht von  $x$  ab**  $\rightarrow$  **autonome Differentialgleichung**.

**Bemerkungen :**

- 1) Sind  $F = (F^1, \dots, F^m)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n)$  vektorwertig, so heißt  $(*)$   
*ein System gewöhnlicher Differentialgleichung der Ordnung  $k$ .*

Beispiel :

$$y(x) := (\sin x, \cos x) \quad \text{löst das Gleichungssystem} \quad \begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -y_1(x) \end{cases}$$

Wie sieht  $F$  hier aus ?

2) Was bedeutet gewöhnliche Differentialgleichung ?

$y = y(x)$  hängt nur von einer reellen Variablen ab, im Unterschied dazu :  
partielle Differentialgleichungen sind Relationen, die zwischen einer Funktion  
 $u(x_1, \dots, x_n)$  und ihren partiellen Ableitungen bestehen, z.B. :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ oder } \frac{\partial}{\partial t} v - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0 \text{ für } v = v(t, x_1, \dots, x_n)$$

Theorie dazu ist viel komplizierter  $\rightarrow$  Hauptstudium !

3) gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben :

- Bewegungsgleichungen in der Physik
- Reaktionsvorgänge in der Chemie
- Evolutionsmodelle in der Biologie

$y(t)$  = Anzahl der Mitglieder in einer Population zur Zeit  $t$ ;

$y'(t)$  = Änderungsrate

Literatur : Braun, Differential Equations and their Applications, Springer

4) kann man (\*) nach der höchsten Ableitung auflösen, also die Form

$$(**) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)), \quad x \in I, \text{ erreichen,}$$

so spricht man von einer **expliziten Differentialgleichung k<sup>ter</sup> Ordnung**

### Explizite Gleichungen und Systeme 1<sup>ter</sup> Ordnung

betrachte  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $x \in I$  ( $f$  gegeben)

**uninteressanter Fall :**

$f$  hängt von  $y$  ab, d.h.

$$y'(x) = f(x), \quad x \in I \xrightarrow{\text{Hauptsatz}} y(x) = c + \int_{x_0}^x f(t) dt, \text{ falls } f \text{ stetig.}$$

Hier gilt :  $c \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  beliebig.

Man sieht direkt :

Ist  $x_0 \in I$  gegeben und sucht man eine Lösung  $y$ , die zur Zeit  $x_0$  den Wert  $\eta$  annimmt, so gibt es **nur genau eine** Lösung.

**Allgemeines vorweg :**

- Differentialgleichungen müssen **keine Lösungen** haben!

$$(y(x) - x)^2 + (y'(x))^2 = 0 \implies \begin{cases} y(x) = x & \text{und} \\ y'(x) = 0 \end{cases}$$

- Differentialgleichungen können viele Lösungen haben!

Beispiel :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt[3]{y^2}, (x, y) \in \mathbb{R} \\ y'(x) &= f(x, y(x)) \end{aligned}$$

Lösung :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &:= 0 \\ \text{oder } \Psi_a(x) &:= \frac{1}{27}(x-a)^3, a \in \mathbb{R}, \\ \text{oder } \Psi_{b,c}(x) &:= \begin{cases} \Psi_b(x) & , x \leq b \\ 0 & , b \leq x \leq c, b < c \\ \Psi_c(x) & , x \geq c \end{cases} \end{aligned}$$

speziell :

$\varphi_0, \Psi_0, \Psi_{b,c}$  ( $b < 0 < c$ ) erfüllen alle das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2} \text{ mit } \boxed{y(0) = 0}$$

unser Ziel :

Bedingungen an  $f(x, y)$ , die die Existenz von Lösungen zu  $y'(x) = f(x, a(x))$  garantieren.

### Definition 22.1 :

Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir schreiben  $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_n)$  für die Variablen von  $f$ .

i)  $f$  heißt **(partiell) Lipschitz stetig bzgl. der y-Variablen**

$$\iff \exists L \geq 0 : |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in G.$$

ii)  $f$  heißt **lokal Lipschitz bzgl. y** (genauer : "lokal partiell"...)

$\forall (x_0, y_0) \in G \exists$  Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0)$  in  $G$  und  $L \geq 0$  mit

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}| \text{ für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in U$$

### Bemerkungen :

1) ii) ist offenbar Abschwächung von i)

2)  $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$  genügt in keiner Umgebung von  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  beliebig, einer lokalen Lipschitz Bedingung (denn  $t \mapsto \sqrt[3]{t^2}$  ist nicht Lipschitz bei 0)

3) *Wie prüft man die Bedingungen?*

Finde Schranken auf  $\frac{\partial f}{\partial y_i}, i = 1, \dots, n$ .

**Satz 22.1 :** (*Eindeutigkeit*)

$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen, sei stetig und genüge in  $G$  einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl.  $y$ . Seien  $\varphi, \Psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Lösungen von  $y'(x) = f(x, y(x))$  auf dem Intervall  $I$  (mit  $(t, \varphi(t)), (t, \Psi(t)) \in G$ ).

Gibt es dann ein  $x_0 \in I$  mit  $\varphi(x_0) = \Psi(x_0)$ , so folgt  $\varphi = \Psi$  auf ganz  $I$ .

**Beweis :**

**1. Schritt :**

Behauptung :

Ist  $a \in I$  ein beliebiger Punkt mit  $\varphi(a) = \Psi(a)$ , so gibt es mindestens ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\varphi = \Psi$  für  $x \in I, |x - a| < \varepsilon$ . ( $\implies \varphi = \Psi$  auf Umgebung von  $x_0 \cap I$ )

Beweis :

Schreibe

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \int_a^x (\varphi'(t) - \Psi'(t)) dt = \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))) dt.$$

Zu  $(a, \varphi(a)) = (a, \Psi(a)) \in G$  existiert Umgebung  $U \subset G$  und  $L \geq 0$  mit

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}| \text{ für } (x, y), (x, \tilde{y}) \in U.$$

$\varphi, \Psi$  stetig in  $a \implies \exists \delta > 0$  ( $\delta > 0$  so, dass  $(t, \varphi(t)), (t, \Psi(t)) \in U$ ) mit

$$|f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))| \leq L \cdot |\varphi(t) - \Psi(t)| \text{ für alle } t \in I, |t - a| < \delta$$

Also :

$$|\varphi(x) - \Psi(x)| \leq L \cdot \left| \int_a^x |\varphi(t) - \Psi(t)| dt \right|, \quad x \in I, |x - a| < \delta$$

O.E. gilt  $L > 0$  und  $L \cdot \delta \leq \frac{1}{2}$  (sonst verkleinere  $\delta$ ).

Sei  $J := I \cap [a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}]$

$$\implies |\varphi(x) - \Psi(x)| \leq L \cdot \delta \cdot \underbrace{\max\{|\varphi(y) - \Psi(y)| : y \in J\}}_{=: M} \text{ für alle } x \in J$$

bilde  $\xrightarrow{\text{links}} \max$

$$M \leq L \cdot \delta \cdot M \leq \frac{1}{2} M$$

$\implies$

$$M = 0,$$

d.h.  $\varphi = \Psi$  auf  $J$ . Mit  $\varepsilon = \delta/2$  folgt die Behauptung.

**2. Schritt :**Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I, x \geq x_0$$

Beweis :

$$\eta_0 := \sup \{ \eta \in I : \varphi = \Psi \text{ auf } [x_0, \eta] \};$$

ist  $\eta_0 = \infty$  oder rechter Endpunkt von  $I \implies$  Behauptung,falls nicht  $\implies \exists \delta > 0$  mit  $[\eta_0, \eta_0 + \delta] \subset I$ Def. von  $\eta_0$ , Stetigkeit von  $\varphi, \Psi \implies \varphi(\eta_0) = \Psi(\eta_0)$ ; $\xrightarrow{\text{Schritt 1}} \exists \varepsilon > 0$  mit  $\varphi = \Psi$  auf  $[\eta_0, \eta_0 + \varepsilon]$ , Widerspruch zur Def. von  $\eta_0$ .**3. Schritt :**Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I, x \leq x_0$$

Beweis :

analog zu Schritt 2

□

**Beispiel :**

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy^2$ , erfüllt überall eine lokale Lipschitz Bedingung bzgl.  $y$ , ist allerdings nicht auf ganz  $G$  Lipschitz bzgl.  $y$ .

Wir zeigen jetzt :  $\left| \begin{array}{l} \text{lokale Lipschitz Stetigkeit von } f \text{ bzgl. } y \\ \implies \text{lokale Existenz von Lösungen.} \end{array} \right.$

Als Hilfsmittel braucht man

**Fixpunktsatz von Banach :** ( $\rightarrow$  Übung)Sei  $(X, d)$  **vollständiger** metrischer Raum und die Abb.  $F : A \rightarrow A$  erfülle

$$d(F(x), F(y)) \leq \Theta d(x, y) \text{ für alle } x, y \in A \text{ mit } \Theta < 1.$$

Ist  $A$  **abgeschlossen**, so hat  $F$  **genau einen** Fixpunkt  $x^*$ , d.h.  $F(x^*) = x^*$ .Für jeden Startwerte  $a \in A$  konvergiert dann die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

gegen  $x^*$ .

**Beweis :**

Man rechne nach, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy Folge ist.

**Satz 22.2 : (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)**

Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und genüge einer **lokalen** Lipschitz-Bedingung bzgl.  $y$  auf  $G$ . Dann gibt es zu jedem  $(a, \eta) \in G$  ein  $\varepsilon > 0$  und eine  $C^1$ -Funktion  $\Psi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\Psi(a) = \eta \quad (\text{Anfangsbedingung})$$

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)) \text{ auf } [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

**Bemerkungen zum Satz von Picard-Lindelöf :**

- 1) Satz 22.1  $\implies$  Eindeutigkeit
- 2) man spricht von einem lokalen Existenzsatz, da  $\Psi$  und  $U$  nur auf einem *sehr kleinen* Intervall um  $a$  existiert.
- 3) Möglicherweise existiert die im Satz gewonnene Lösung aber auch auf einem größeren Intervall als  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ .  
*Anders als bei linearen Problemen kann man bei nichtlinearen Problemen i.a. keine Existenz für alle Zeiten erwarten!* (vgl. Zusatz zu Satz 22.2).

**Beispiel :**

$$y'(x) = 1 + y^2(x), \quad y(0) = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

wird eindeutig gelöst von  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \tan \mathbf{x}$ , wobei der Definitionsbereich dieser Lösung nicht vergrößert werden kann!

- 4) Eine Funktion  $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)), \quad \Psi(a) = \eta, \quad x \in I,$$

wenn es **keine** Lösung  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, die auf einem Intervall  $J \supsetneq I$  erklärt ist.

Man kann zeigen :

*Unter den Voraussetzungen von Satz 22.2 lässt sich die lokale Lösung  $\Psi$  zu einer maximalen Lösung fortsetzen.*

**Spezialfall :**

Sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl.  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)), \quad \Psi(a) = \eta.$$

Seien  $\alpha < \beta$  die Grenzen von  $I$ . Dann gilt :

- i)  $\alpha = -\infty$       **oder**
- ii)  $\boxed{\alpha > -\infty}$  : In diesem Fall ist  $\lim_{x \downarrow \alpha} |\Psi(x)| = \infty$
- iii)  $\beta = \infty$       **oder**
- iv)  $\boxed{\beta < \infty}$  : In diesem Fall ist  $\lim_{x \uparrow \beta} |\Psi(x)| = \infty$ .

- 5) Falls  $f$  nur stetig ist, kann man noch lokale Existenz beweisen, hat aber keine Eindeutigkeit. (**Satz von Peano**)
- 6) Man kann die Größe von  $\varepsilon$  genau ausrechnen. Das ergibt unter Umständen globale Existenzsätze. (vgl. Zusatz zu Satz 22.2)

**Beweis :**

Wir beginnen mit einer Umformulierung des Problems

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $a \in I, \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Dann gilt :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(a) = \eta \\ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), x \in I \end{array} \right\} \quad \text{“Anfangswertproblem”}$$

$$\stackrel{\text{Hauptsatz}}{\iff} \varphi(x) = \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt, x \in I \quad \text{“Integralgleichung”}$$

$$\iff T(\varphi) = \varphi \quad (*) \quad \text{“Fixpunktproblem”}$$

mit dem Operator  $T(\varphi)(x) := \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt, x \in I$ .

Nun richten wir “alles” so ein, dass wir den Fixpunktsatz anwenden können :

Sei  $r > 0$  so, dass

$$V := [a - r, a + r] \times \overline{B}_r(\eta) \subset G$$

und  $f$  auf  $V$  Lipschitz ist mit Konstante  $L > 0$ . Dann gilt

$$V \text{ kompakt, } f \text{ stetig} \implies M := \sup_V |f| < \infty.$$

Sei  $\varepsilon < r$  noch beliebig,  $I := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ .

Setze nun :

$$\begin{aligned} X &:= \left( C^0(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty \right), \\ A &:= \left\{ \varphi \in X : \|\varphi - \eta\|_\infty \leq r \right\} \quad (\|\varphi(t)\|_\infty := \sup_{t \in I} |\varphi(t)|), \\ T &: A \longrightarrow X \text{ wie vorhin.} \end{aligned}$$

**Beachte :**

- $A$  ist *abgeschlossene* Kugel um die konstante Funktion  $\eta$
- $x \mapsto \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$ ,  $x \in I$ , ist nach dem Hauptsatz sogar  $C^1$ , also ein Element von  $X$

**Zeige :**

1)  $T(A) \subset A$

$$\text{Sei } \varphi \in A \implies \|T(\varphi) - \eta\|_\infty = \sup_{x \in I} \left| \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \right|$$

Es ist

$$|t - a| \leq |x - a| \leq \varepsilon < r \text{ und } |\varphi(t) - \eta| \leq r, \text{ da } \varphi \in A$$

$$\implies (t, \varphi(t)) \in V, \text{ so dass } \sup_{x \in I} \left| \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq M \cdot \varepsilon$$

$$\text{Wir verlangen : } \boxed{M \cdot \varepsilon < r} \quad (*)$$

$$\implies \|T(\varphi) - \eta\| \leq r, \text{ d.h. 1) gilt.}$$

2)  $T$  ist (bei passender Wahl von  $\varepsilon$ ) streng kontrahierend

$$\text{Seien } \varphi, \Psi \in A \xrightarrow{s.o.} (t, \varphi(t)), (t, \Psi(t)) \in V \forall t \in I.$$

Also gilt :

$$\|T(\varphi) - T(\Psi)\|_\infty = \sup_{x \in I} \left| \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))) dt \right| \leq L \cdot \varepsilon \cdot \|\varphi - \Psi\|_\infty.$$

$$\text{In Ergänzung zu } (*) \text{ sei noch : } \boxed{L \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{2}}$$

Erfüllt  $\varepsilon$  all diese Bedingungen, so gibt es  $\varphi \in A$  mit  $T(\varphi) = \varphi$ .  
 $\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  ist dann die gesuchte Lösung.

□

**Zusatz zu 22.2 :** (globale Existenz bei linearem Wachstum)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall (auch  $I = \mathbb{R}$ ),  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig mit (globaler) partieller Lipschitz-Bedingung bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen. Außerdem sei  $F$  höchstens linear wachsend in  $y$ , d.h. es gibt  $a, b \geq 0$  mit

$$\boxed{|F(x, y)| \leq a|y| + b \quad \forall (x, y) \in I \times \mathbb{R}^n.}$$

Seien  $(x_0, \eta) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es **genau eine** auf ganz  $I$  definierte Lösung

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{des AWP : } y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(x_0) = \eta, \quad x \in I$$

**Bemerkung :**

hier wird also  $I$  vorgegeben!

**Beweis :**

siehe Übung

**Anwendung :** (s. später)

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + b(x) \quad (\text{lineares System})$$

mit stetiger  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  und  $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $|A(x)|, |b(x)| \leq \text{const} < +\infty$

Hier :  $F(x, y) = A(x)y + b(x)$

### Explizite Gleichungen und Systeme beliebiger Ordnung

Satz 22.1 und Satz 22.2 gelten für explizite Gleichungen und Systeme **1<sup>ter</sup> Ordnung**.

Daher benutzt man bei der Lösung expliziter Gleichungen  $k^{\text{ter}}$  Ordnung einen "Trick", mit dessen Hilfe man diese Gleichungen auf Systeme  $1^{\text{ter}}$  Ordnung reduziert :

Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Betrachte für  $y : \text{Intervall } I \rightarrow \mathbb{R}$  die explizite Gleichung  $k^{\text{ter}}$  Ordnung.

$$(1) \quad y^{(k)}(x) = f\left(x, \underbrace{y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)}_{\in \mathbb{R}^k}\right), \quad x \in I.$$

$$\left( \text{z.B. } y^{(4)}(x) = x^2 y(x) + \left(y''(x)\right)^3 + y'''(x) \right)$$

Definiere mit einer Lösung  $y$  die Vektorfunktion

$$Y(x) := \left( y(x), \dots, y^{(k-1)}(x) \right) \quad (\in \mathbb{R}^k)$$

Schreibt man  $Y$  in der Form  $(Y_0, \dots, Y_{k-1})$ , so gelten die folgenden Gleichungen :

$$(2) \quad \begin{cases} Y_0'(x) &= Y_1(x) \\ Y_1'(x) &= Y_2(x) \\ \vdots & \\ Y_{k-1}'(x) &= f(x, Y(x)), \end{cases}$$

wobei die letzte Zeile offenbar genau der Gleichung (1) entspricht.

Sei  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $F(x, Z) := (Z_1, \dots, Z_{k-1}, f(x, Z_0, \dots, Z_{k-1})) \in \mathbb{R}^k$  für  $Z = (Z_0, \dots, Z_{k-1})$ .

Dann liest sich (2) als

$$(2)^* \quad Y'(x) = F(x, Y(x)).$$

**Ergebnis :**

$$y(x) \text{ löst (1)} \implies Y(x) = \left( y(x), \dots, y^{(k-1)}(x) \right) \text{ löst (2)^*}$$

**umgekehrt :**

Sei  $Y(x) = (Y_0(x), \dots, Y_{k-1}(x))$  Lösung von  $(2)^*$  mit obigem  $F$ .

$$\stackrel{\text{Induktion}}{\implies} y(x) := Y_0(x) \text{ löst (1)} \quad \left( \text{zeige : } Y_1 = Y_0', Y_2 = Y_1', \dots \right)$$

**Es besteht also eine bijektive Beziehung zwischen den Lösungen von (1) und (2)\* .**

**Außerdem sieht man :**

Lösungen  $Y$  zu  $(2)^*$  sind *eindeutig* (unter vernünftigen Bedingungen zu  $F$ ), wenn  $Y(x_0)$  zu einer Zeit  $x_0$  vorgeschrieben wird. Also müssen bei einer Gleichung  $k^{\text{ter}}$  Ordnung  $k$  Vorgaben  $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0)$  gemacht werden.

**Beachte nun noch :**

$$\begin{array}{l} \text{lokale Lipschitz-Bedingung von} \\ f : G \rightarrow \mathbb{R} \text{ bzgl. der } \mathbb{R}^k\text{-Variablen} \end{array} \iff \dots \quad F : G \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Mithin gilt dann folgendes Korollar :

**Korollar (zu 22.1 und 22.2) :**

Sei  $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und erfülle bzgl. der  $\mathbb{R}^k$ -Variablen eine lokale Lipschitz-Bedingung auf  $G$ .

a) Seien  $\varphi, \Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen von

$$(*) \quad y^{(k)} = f\left(\cdot, y, \dots, y^{(k-1)}\right)$$

auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ . Sei  $a \in I$  gegeben mit

$$\varphi(a) = \Psi(a), \varphi'(a) = \Psi'(a), \dots, \varphi^{(k-1)}(a) = \Psi^{(k-1)}(a).$$

Dann gilt  $\varphi = \Psi$  auf  $I$ .

b) Ist  $(a, \eta_0, \dots, \eta_{k-1}) \in G$  beliebig, so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Lösung

$$\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R} \text{ von } (*) \text{ mit } \varphi(a) = \eta_0, \varphi'(a) = \eta_1, \dots, \varphi^{(k-1)}(a) = \eta_{k-1}.$$

□

**Bemerkung :**

Systeme der Ordnung  $k \geq 2$  lassen sich auf Systeme der Ordnung 1 mit entsprechend mehr Komponenten reduzieren  $\rightarrow$  Korollar anwendbar

**Beispiel zur Bemerkung :**

Reduktion eines Systems 2<sup>ter</sup> Ordnung auf ein System 1<sup>ter</sup> Ordnung

Bewegungsgleichung : (“ $\cdot$ ” bedeutet  $\frac{d}{dt}$ )

System 2<sup>ter</sup> Ordnung :

$$\ddot{X}(t) = F\left(t, X(t), \dot{X}(t)\right)$$

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (Ortsvektor).}$$

Setze  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad Y(t) := \left(X(t), \dot{X}(t)\right) \implies$

$$(*) \quad \dot{Y}(t) = \left(Y_4(t), Y_5(t), Y_6(t), F^1\left(t, Y(t)\right), F^2\left(t, Y(t)\right), F^3\left(t, Y(t)\right)\right)$$

wobei  $Y = (Y_1, \dots, Y_6), \quad F = (F^1, F^2, F^3)$ .

(\*) ist System 1<sup>ter</sup> Ordnung für die Funktion  $Y$  mit 6 Komponenten.

Eine allgemeine Formulierung des Transformationsprinzips für Systeme der Ordnung  $k$  bringt keine neuen Einsichten. Es sollte klar sein, wie es funktioniert.

□

## Elementare Lösungsmethoden

### Regelfall :

Differentialgleichungen  $y^{(k)} = f(\cdot, y, y', \dots, y^{(k-1)})$  (+ Anfangsbedingung) lassen sich **nicht elementar** lösen, d.h. es gelingt nicht, Lösungen *in geschlossenen Formeln*  $y(x) = \dots$  anzugeben.

### Methode :

Wir haben Picard-Lindelöf; dieser Satz benutzt ein Fixpunktprinzip, d.h. die Lösung  $y$  wird konstruiert als Limes einer Folge  $\{y_n\}$  mit

$$\begin{aligned} y_0 &= \text{beliebige Startfunktion,} \\ y_n &= \text{Integraloperator angewendet auf } y_{n-1} \end{aligned}$$

Man kann diese Vorschrift ohne weiteres *numerisch umsetzen* und somit die exakte Lösung  $y$  beliebig gut approximieren. *Fehlerabschätzungen* der Form  $\|y - y_n\| \cong 1/n$  geben Information, wie weit man noch von der Lösung entfernt ist.

*In einigen Spezialfällen lassen sich Lösungen nun doch explizit bestimmen.* Die wichtigsten Verfahren sind nachfolgend kurz zusammengestellt.

### 1) Separation der Variablen

Seien  $I, J$  Intervalle  $\subset \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

$$(1) \quad \boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))} \quad \text{auf } I \text{ ist zu lösen.}$$

Angenommen, (1) hat Lösung  $y(x)$ , dann gilt :

Sei  $G$  Stammfunktion zu  $1/g$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} y'(x) / g(y(x)) = \frac{d}{dx} G(y(x)),$$

$$\text{also} \quad \frac{d}{dx} G(y(x)) - f(x) = 0$$

$$\implies G(y(x)) = F(x) + c, \quad F \text{ Stammfunktion zu } f, \quad c \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Nun löse umgekehrt diese Gleichung, falls möglich (siehe Satz 22.3), nach  $y(x)$  auf und zeige, dass (1) gilt.

Die genaue Formulierung gibt uns der folgende Satz :

**Satz 22.3 :**

Sei  $(x_0; y_0) \in I \times J$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $g(y) \neq 0$  auf  $J$ .

Man setze

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in I; \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)}, \quad y \in J$$

Sei  $I' \subset I$  ein Intervall mit  $x_0 \in I'$  und  $\boxed{F(I') \subset G(J)}$ . (\*)

Dann gibt es genau eine Lösung  $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  von (1) mit  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Es gilt :  $G(\varphi(x)) = F(x)$  für alle  $x \in I'$ .

**Beweis :**

beachte :  $G$  ist streng monoton :  $G' = g$  und  $g \neq 0$ , somit ist  $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$

aus (\*) folgt  $\text{Bild } F \subset \text{Def } G^{-1} = \text{Bild } G$ , so dass  $G^{-1} \circ F$  Sinn macht.

→ genaueres siehe Übung!

□

**Beispiel :**

$$(*) \quad \boxed{y'(x) = y^2(x)}$$

hier :  $f(x) = 1$ ,  $g(y) = y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

gesucht : Lösung  $\varphi$  von (\*) mit  $\varphi(0) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$

Rechte Seite  $(x, y) \mapsto y^2$  genügt *lokaler Lipschitz Bedingung* auf  $\mathbb{R}^2$

bzgl. der  $y$ -Variablen

$\xrightarrow{\text{Satz 22.2}}$   $\exists!$  Lösung  $\varphi$  lokal bei 0 definiert

(i)  $c = 0 \xrightarrow{\text{Satz 22.2}} \varphi \equiv 0$  eindeutige Lösung (klar!)

(ii)  $c > 0 \implies \exists$  Intervall  $I_0$  um 0 und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$   
mit  $\varphi(0) = c$ ,  $\varphi'(x) = \varphi^2(x)$

Annahme :  $\varphi(x) \leq 0$  für ein  $x \in I_0$

da  $\varphi(0) > 0 \xrightarrow{\implies} \exists x_0$  mit  $\varphi(x_0) = 0$

$\xrightarrow{\text{Eindeutigkeitsatz 22.1}} \varphi = 0$  auf  $I_0!$  (Widerspruch!)

Also :  $\varphi > 0$  auf  $I_0$ .

**Wie groß ist  $I_0$ ? Wie sieht  $\varphi$  aus ?**

Man kann in 22.3  $J = (0, \infty)$  wählen,

$$g(y) = y^2 \text{ ist dort } \neq 0 \implies G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}, \quad y \in J;$$

$$F(x) = \int_0^x dt = x.$$

Es gilt :  $G(J) = (-\infty, 1/c)$

$\implies I' := (-\infty, 1/c)$  erfüllt  $F(I') \subset G(J)$ .

Somit ist die Lösung  $\varphi$  auf  $(-\infty, 1/c)$  definiert. Nun betrachte

$$\begin{aligned} G(\varphi(x)) = F(x) &\iff \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = x \\ &\iff \underline{\varphi(x) = \frac{c}{1 - cx}, \quad x \in (-\infty, 1/c)}. \end{aligned}$$

(iii)  $c < 0$  :

analog :  $\varphi : (\frac{1}{c}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \frac{c}{1 - cx}$  für  $x > 1/c$ .

□

**Bemerkung :**

Man sieht die Nützlichkeit von Satz 22.1 und Satz 22.2, da diese Sätze vorweg schon Informationen liefern.

## 2) Reduktion auf getrennte Veränderliche

$$(i) \quad \boxed{y'(x) = f(a \cdot x + by(x) + c)}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0, f : \text{Intervall} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Setze} \quad \boxed{v(x) := ax + by(x) + c}$$

$$\implies \quad v'(x) = a + bf(v(x))$$

beachte : die Anfangsbedingungen für  $y$  müssen auch transformiert werden!

$$(ii) \quad \boxed{y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)}$$

$$\text{Setze} \quad \boxed{u(x) := \frac{y(x)}{x}}$$

$$\begin{aligned} \implies \quad u'(x) &= \frac{1}{x^2} (x \cdot y'(x) - y(x)) \\ &= \frac{1}{x} \cdot f(u(x)) - \frac{1}{x} \cdot u(x) \\ &= \frac{1}{x} (f(u(x)) - u(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Also} \quad u'(x) = A(x) \cdot B(u(x)), \quad A(x) := \frac{1}{x}, \quad B(u) := f(u) - u$$

**Beispiel :**

$$y'(x) = 1 + \frac{1}{x}y(x) + \left(\frac{1}{x}y(x)\right)^2 \text{ für } x > 0 \quad (f(u) := 1 + u + u^2)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{u(x)=y(x)/x} \quad u'(x) &= \frac{1}{x} (1 + u(x) + u(x)^2 - u(x)) \\ &= \frac{1}{x} (1 + u^2(x)) \\ &\Rightarrow \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = 1/x \end{aligned}$$

$$\implies \quad \frac{d}{dx} (\arctan u(x)) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln x$$

$$\implies \quad u(x) = \tan(c + \ln x)$$

$$\implies \quad \underline{y(x) = x \cdot \tan(x + \ln x), \quad x > 0.}$$

### 3) Lineare Differentialgleichungen 1<sup>ter</sup> Ordnung

Seien gegeben :  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

betrachte  $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$  auf  $I$

homogener Fall :  $b \equiv 0$

**Satz 22.4 :**

Seien  $x_0 \in I$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es **genau eine** Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) \text{ mit } y(x_0) = c_0$$

$$\text{Es ist} \quad y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \cdot c_0.$$

**Beweis :**

- 1) Eindeutigkeit : Satz 22.1!
- 2) Existenz : leite die Formel ab!

□

Konstruktion von Lösungen im inhomogenen Fall  $b \neq 0 \rightarrow$  “Variation der Konstanten”

Sei  $\varphi$  eine Lösung  $\neq 0$  der homogenen Gleichung  $y'(x) = a(x)y(x)$

(beachte :  $\varphi \neq 0 \implies \varphi$  ist nirgends  $= 0$  nach 22.1).

Bestimmung einer Lösung  $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  von

$$(*) \quad y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

durch den

Ansatz :  $y(x) = u(x) \cdot \varphi(x)$  (multipliziere  $\varphi$  mit einem von  $x$  abhängigen Faktor)

Dann :

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot \varphi'(x) \\ &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot a(x) \cdot \varphi(x) \\ &\stackrel{!}{=} a(x) \cdot u(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \\ \implies u'(x) &= b(x) / \varphi(x) \\ \implies u(x) &= \left( \text{Stammfkt. zu } \frac{b}{\varphi} \right) + \text{const} \end{aligned}$$

Probe : definiere  $u$  durch diese Gleichung und setze  $\Psi(x) = u(x) \varphi(x) \implies \Psi$  löst (\*).

Nach 22.1 hat \* bei Vorgabe eines Anfangswerte  $y(x_0) = c_0$  höchstens eine Lösung. Beachtet man noch 22.4, also die Formel für  $\varphi$ , so folgt :

**Satz 22.5 :**

*Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig. Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in I$  und jedem  $c_0 \in \mathbb{R}$  genau eine Lösung  $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  von*

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_0 \\ y'(x) &= a(x)y(x) + b(x) \text{ auf } I. \end{aligned}$$

*Es gilt*

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \varphi(x) \left( c_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt \right), \\ \varphi(x) &= \exp \left( \int_{x_0}^x a(t) dt \right) \quad \left( \implies \varphi(x_0) = 1 \right)\end{aligned}$$

**Beispiel :**

$$y'(x) = 2x \cdot y(x) + x^3, \quad y(0) = c_0$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt :

$$\varphi(x) = \exp \left( \int_{x_0}^x 2t dt \right) = \exp t^2 \Big|_{x_0}^x = e^{x^2}$$

löst für  $x_0 = 0$  das homogene Problem  $\varphi' = a \cdot \varphi$ ,  $\varphi(0) = 1$

$$\begin{aligned}\implies \Psi(x) &= e^{x^2} \cdot \left( c_0 + \underbrace{\int_0^x e^{-t^2} \cdot t^3 dt}_{\text{part. Int. } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+x^2) e^{-x^2}} \right) \\ &= \left( c + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - \frac{1}{2} (1 + x^2).\end{aligned}$$

#### 4) Lineare Systeme 1<sup>ter</sup> Ordnung

(enthält als Spezialfall lineare Gleichungen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung (via Reduktion)).

##### 4 a) Allgemeiner Fall :

##### Voraussetzungen :

$I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $A \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ , d.h.  $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$  mit stetigen Funktionen  
 $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b \in C^0(I, \mathbb{R})$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ .

##### Inhomogenes System :

$$\begin{aligned}(1) \quad y'(x) &= A(x) y(x) + b(x) \\ \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Homogenes System :

$$(2) \quad y'(x) = A(x)y(x)$$

bemerke : Satz 22.2  $\implies$  lokale Existenz von Lösungen.

Wir werden zeigen :

- Lösungen zu (1), (2) existieren nach dem Zusatz zu 22.2 auf ganz  $I$
- vollständige Beschreibung der Lösungsmenge !

**Notation :**

Differentialoperator

$$L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n), L := \frac{d}{dx} - A(x),$$

$$\text{d.h. } L(y)(x) := y'(x) - A(x)y(x)$$

bemerke :

- $L$  ist ein linearer Operator
- Lösungsmenge des homogenen Systems  
= Nullraum  $N(L)$  von  $L$   $\left( = \{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : L(y) = 0\} \right)$

**Satz 22.6 :**

$$\boxed{\dim N(L) = n}$$

- D.h. :*
- (i) *Es gibt  $n$  linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems*
  - (ii)  *$n + 1$  Lösungen des homogenen Problems sind linear abhängig.*

Wir brauchen ein

**Lemma :**

Seien  $y^1, \dots, y^n \in N(L)$ ,  $y^i = (y_1^i, \dots, y_n^i)$

Man setzt  $\Delta(x) = \det \left( y^1(x) \dots y^n(x) \right)$  ( $y^i$  als Spaltenvektoren)

Dann gilt :

- i)  $\Delta(x_0) = 0$  für ein  $x_0 \iff \Delta \equiv 0$  auf  $I$
- ii)  $y^1, \dots, y^n$  linear unabhängig  $\iff \Delta$  ist nirgends 0

**Beweis (Lemma) :**

- i)  $\Delta(x_o) = 0$  für ein  $x_o$   
 $\iff y^1(x_o), \dots, y^n(x_o) \in \mathbb{R}^n$  sind linear abhängig  
 $\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  nicht alle 0 mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i y^i(x_o) = 0$ .

$$y(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i y^i(x) \text{ löst } L(y) = 0 \text{ auf } I.$$

Aus  $y(x_o) = 0$  folgt nach 22.1  $y(x) = 0 \forall x \in I$ .

Das bedeutet  $\Delta(x) = 0$  auf  $I$ .

- ii)  $\Delta = 0$  für ein  $x_o$   
 $\stackrel{i)}{\iff} y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y^i \equiv 0$  auf  $I$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  nicht alle 0  
 $\iff y^1, \dots, y^n$  linear abhängig.

Negation dieser Aussage ergibt ii)

□

**Beweis von 22.6 :**

- i) Sei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_o \in I$  beliebig. Nach 22.2 und der anschließenden Verschärfung,  $y'(x) = A(x)y(x) =: F(x, y(x))$  mit  $|F(x, y) - F(x, \tilde{y})| \leq \|A(x)\| \cdot |y - \tilde{y}|$  (die wir jetzt zum ersten Mal brauchen!), gibt es  $y^1, \dots, y^n \in N(L)$  mit  $y^i(x_o) = e_i$ .

Es ist

$$\Delta(x_o) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also  $y^1, \dots, y^n$  linear unabhängig.

- ii) Seien  $y^1, \dots, y^m \in N(L)$  mit  $m > n$ ,  $x_o \in I$ .

$$\implies \exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \text{ nicht alle 0 mit } \sum_{i=1}^m c_i y^i(x_o) = 0,$$

da  $y^1(x_o), \dots, y^m(x_o)$  in  $\mathbb{R}^n$  linear abhängig sind.

$$y := \sum_{i=1}^m c_i y^i \text{ gehört zu } N(L) \text{ mit } y(x_o) = 0 \stackrel{22.1}{\implies} y \equiv 0$$

$$\iff y^1, \dots, y^m \text{ linear abhängig.}$$

□

**Definition 22.2 :**

Eine Basis des Nullraumes von  $L$  heißt ein **Fundamentalsystem** zum homogenen System.

**Bemerkung :**

Für die *homogene Gleichung*  $\varphi'(x) = a(x) \varphi(x)$  haben wir explizite Lösungsformeln, im Fall des Systems  $y'(x) = A(x) y(x)$  gibt es solche Formeln nur, wenn die Matrix *konstant* ist (s. später).

**Beispiel :**

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = -\alpha y_2 \\ y_2' = \alpha y_1 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösungen :

$$\text{z.B. } \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos & \alpha x \\ \sin & \alpha x \end{pmatrix}, \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin & \alpha x \\ \cos & \alpha x \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \cos^2(\alpha x) + \sin^2(\alpha x) \equiv 1$$

$$\implies \varphi_1, \varphi_2 \text{ bilden Fundamentalsystem}$$

→ Übung :

Umformung homogener linearer Gleichungen der Ordnung 2, 3 in Systeme 1<sup>ter</sup> Ordnung, Fundamentalsysteme?

Wir gehen zurück zum inhomogenen System (1) und bestimmen Lösungen mit Konstantenvariation.

**Satz 22.7 :**

i) Sei  $y^1, \dots, y^n$  ein Fundamentalsystem zum homogenen System. Die reellen Funktionen  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien Lösungen von

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n c_i'(x) y^i(x) = b(x)$$

auf  $I$ . Dann ist  $y^\circ(x) := \sum_{i=1}^n c_i(x) y^i(x)$  Lösung von (1)

(ein sogenannte spezielle Lösung).

ii) Jede Lösung  $y$  von (1) hat die Form  $y = y^\circ + h$  mit  $L(h) = 0$ .

**Bemerkung :**

Da  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  zu jeder Zeit  $x$  linear unabhängig sind, werden die Zahlen  $c'_i(x)$  durch (\*) eindeutig festgelegt. Nun bestimme man Stammfunktionen!

**Beweis :**

(ii) klar!

(i) Seien die  $c_i$  gemäß(\*) berechnet

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) y^i(x) \right) &= \sum_{i=1}^n c'_i(x) y^i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{d}{dx} y^i(x) \\ &= b(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) A(x) y^i(x) \\ &= b(x) + A(x) \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) y^i(x) \right) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung :**

Zur Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta \in \mathbb{R}^n \\ y'(x) &= A(x) y(x) + b(x) \end{aligned}$$

wähle man ein Fundamentalsystem  $y^1, \dots, y^n$  und berechne eine spezielle Lösung  $y^0$ ; dann setze man

$$y(x) = y^0(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i(x),$$

wobei die Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  als Lösungen von  $y^0(x_0) + \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i(x_0) = \eta$  zu bestimmen sind.

**Beispiel :**

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = -y_2 \\ y'_2 = y_1 + x \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Die Funktionen  $(\cos x, \sin x)$ ,  $(-\sin x, \cos x)$  bilden ein Fundamentalsystem zum homogenen Problem.

Ansatz :

$$\begin{aligned}
 c_1'(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also :

$$c_1'(x) = x \cdot \sin x, \quad c_2'(x) = x \cdot \cos x$$

Wähle deshalb

$$c_1(x) = \sin x - x \cdot \cos x, \quad c_2(x) = \cos x + x \cdot \sin x.$$

Es folgt dann als spezielle Lösung :

$$y_0(x) = (\sin x - x \cos x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + (\cos x + x \sin x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

□

#### 4 b) Spezialfall : Lineare Gleichungen höherer Ordnung

Solche Gleichungen lassen sich in Lineare Systeme 1<sup>ter</sup> Ordnung transformieren, so dass man direkt die Sätze 22.6 und 22.7 anwenden kann. Die hierbei auftretenden Matrizen haben eine sehr spezielle Gestalt.

**Notation :**

$I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ ,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) homogene Gleichung :  $y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x)$
- 2) inhomogene Gleichung :  $y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + b(x).$

**Beispiel :**

$$y^{(3)}(x) = x^2 \cdot y^{(2)}(x) + e^x \cdot y(x) + \sinh x$$

**Satz 22.8 :**

(i) Sei  $H = \{\varphi \in C^n(I, \mathbb{R}) : \varphi \text{ löst (1)}\}$ . Dann ist  $\dim H = n$ .

D.h. : Es gibt  $n$  linear unabhängige Lösungen von (1),  
 $m > n$  Lösungen sind stets voneinander abhängig.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H$  sind **genau dann linear unabhängig**,  
wenn für ein  $x \in I$  (alle  $x \in I$ ) gilt :

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Man nennt dann  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein *Fundamentalsystem*.

(ii) Sei  $\Psi_o$  eine spezielle Lösung von (2). Dann gilt :

$$\text{Lösungsmenge von (2)} = \Psi_o + H.$$

**Beweis :**

Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_o(x) & a_1(x) & \dots & \dots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

betrachte

$$(1)^* \quad Y'(x) = A(x)Y(x) \quad \text{und}$$

$$(2)^* \quad Y'(x) = A(x)Y(x) + \bar{b}(x)$$

Dann gilt :

$$Y = (y_0, \dots, y_{n-1}) \text{ löst } (1)^* \text{ bzw. } (2)^*$$

$$\iff y_i = y'_{i-1} \text{ für } i \leq n-1 \text{ und } y_0 \text{ löst } (1) \text{ bzw. } (2).$$

Daraus folgen mit Satz 22.6 und 22.7 alle Aussagen.

□

### Bemerkungen :

1) Für die spezielle Lösung  $\Psi_0$  des inhomogenen Systems macht man den Ansatz

$$c_1(x) \varphi_1(x) + \dots + c_n(x) \varphi_n(x) = \Psi_0(x)$$

mit einer Basis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  von  $H$ . Die Funktionen  $c_i$  ergeben sich aus

$$\sum_{i=1}^n c'_i(x) \begin{pmatrix} \varphi_i(x) \\ \varphi'_i(x) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

( $\varphi_i^{(j)}$  für  $j = 0, \dots, n-1$  und  $b(x)$  sind Spaltenvektoren)

2) Behandlung des AWP :

Vorgabe von  $\varphi(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0)$

$$\implies \varphi = \psi_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \varphi_i$$

$\tilde{c}_i$  derart dass AWP erfüllt.

Für lineare Gleichungen der Ordnung  $n > 1$  mit *variablen* Koeffizienten gibt es *kein* Patentrezept zur Bestimmung eines Fundamentalsystems, das gleiche gilt für Systeme mit variabler Koeffizientenmatrix. Aussagen sind manchmal für Gleichungen 2<sup>ter</sup> Ordnung möglich. Hier gilt : *Hat man eine nichttriviale Lösung  $\varphi_1$  des homogenen Problems bestimmt, so läßt sich diese zu einem Fundamentalsystem ergänzen.*

### Satz 22.9 :

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$  und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei Lösung von

$$(*) \quad y''(x) + a(x) y'(x) + b(x) y(x) = 0$$

Auf dem Intervall  $J \subset I$  sei  $\varphi$  **ohne** Nullstelle.

Ist dann  $u$  eine **nicht-konstante** Lösung der Gleichung.

$$(**) \quad u''(x) + \left( 2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x) \right) \cdot u'(x) = 0 \quad (\text{Lösung davon s. später})$$

auf  $J$ , so ist

$$\Psi : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi := u \cdot \varphi,$$

eine **von  $\varphi$  unabhängige Lösung**, d.h.  $\{\varphi, \Psi\}$  ist ein Fundamentalsystem auf  $J$ .

**Beweis :**

Man setzt  $\Psi = \varphi \cdot u$

$$\implies \Psi' = \varphi' u + u' \varphi \text{ und } \Psi'' = \varphi'' u + u'' \varphi + 2u' \varphi';$$

benutze (\*) für  $\varphi$

$$\begin{aligned} \implies \Psi'' + a \cdot \Psi' + b \Psi &= \underbrace{[-u \overbrace{(a\varphi' + b\varphi)}^{(*)-\varphi''} + u''\varphi + 2u'\varphi']}_{=\Psi''} + a \underbrace{(\varphi' u + u' \varphi)}_{=\Psi'} + b u \varphi \\ &= u'' \cdot \varphi + a u' \varphi + 2u' \varphi' \\ &= \varphi \left[ u'' + u' \left( a + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} \right) \right] \end{aligned}$$

**Ergebnis :**

$$\Psi \text{ löst } (*) \iff [\dots] = 0 \iff u \text{ erfüllt } (**).$$

Probe der Linearen Unabhängigkeit :

$$\det \begin{pmatrix} \varphi & u \cdot \varphi \\ \varphi' & u' \varphi + \varphi' u \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \varphi^2 \cdot u' + \varphi' \varphi u - u \varphi \varphi' = 0$$

$$\iff u' \cdot \varphi^2 = 0$$

$$\stackrel{\varphi^2 > 0}{\iff} u' = 0$$

$$\iff u = \text{const.}$$

$u$  wird aber als nicht-konstant angenommen.

□

**Bemerkung :** zu Differentialgleichung (\*\*):

(\*\*) tritt als zusätzliche Differentialgleichung bei der Anwendung des Verfahrens auf. Diese Gleichung läßt sich aber mittels Reduktion der Ordnung unschwer lösen :

$$v := u' \implies v' + \left( 2 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + a \right) \cdot v = 0$$

$$\implies \text{homogene Gleichung 1}^{\text{ter}} \text{ Ordnung für } v$$

$$\stackrel{22.4}{\implies} v(x) = \exp \left( \int_{x_0}^x 2 \frac{\varphi'}{\varphi} + a dt \right)$$

$$\implies u(x) = \int_{x_0}^x v(t) dt.$$

□

**Beispiele und Bemerkungen zu  
Linearen Differentialgleichungen 2<sup>ter</sup> Ordnung mit variablen Koeffizienten**

betrachte  $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$  auf  $I \subset \mathbb{R}$ .

bisherige Annahme :  $a, b$  nur stetig.

Macht man sehr **viel stärkere Annahmen**, so gelingt es manchmal, eine nicht-triviale Lösung  $\varphi$  von (\*) zu konstruieren. Dann kann man unter Umständen Satz 22.9 benutzen und erhält ein Fundamentalsystem, also mit 22.8 eine Übersicht über die Lösungsgesamtheit auch im inhomogenen Fall. Das Stichwort ist

**Potenzreihenansatz :** ( $\rightarrow$  Übung!)

Voraussetzung :

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k, \quad b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_0)^k,$$

d.h. : die Koeffizienten  $a(x), b(x)$  in (\*) lassen sich um  $x_0 \in I$  als konvergente Potenzreihen schreiben.

Dann setzt man

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_0)^k,$$

d.h. man geht davon aus, dass es eine analytische Lösung gibt.

Einsetzen + Identitätssatz

$\implies$  Rekursionsformeln für  $\gamma_k$  in Termen von  $\alpha_k, \beta_k$

danach :

Probe, ob  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_0)^k$  auf Umgebung von  $x_0$  konvergent ist !

falls ja :

Rechnungen wie

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_0)^k \right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \gamma_k (x - x_0)^{k-2}$$

sind erlaubt.

$\implies y(x)$  löst die Differentialgleichung.

Übung :(1) **Legendre-DGL. :**

$$\boxed{(1+x^2)y''(x) - 2x \cdot y'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \quad \text{auf } (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N}_0}$$

(kommt in der theor. Physik vor)

Potenzreihenansatz liefert :

$$\implies \boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n} \quad \underline{\text{Legendre-Polynom}} \quad (\text{der Ordnung } n).$$

(2) **Hermite-DGL. :**

$$\boxed{y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0}$$

Potenzreihenansatz ergibt :

$$\implies \boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}} \quad \underline{\text{Hermite-Polynom}} \quad (\text{der Ordnung } n).$$

 $P_n$  bzw.  $H_n$  sind Lösungen zu (1) bzw. (2) für das jeweilige  $n$ .Wir konstruieren für die Legendre-Dgl. mit  $n = 1$  ein Fundamentalsystem :

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2 \cdot y(x) = 0 \quad \text{auf } (-1, 1)$$

$$\iff y''(x) - \frac{2x}{1-x^2} y'(x) + \frac{2}{1-x^2} y(x) = 0 \quad \text{auf } (-1, 1)$$

bekannte Lösung :  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = P_1(x)$ Ansatz :  $\Psi(x) = u(x) \cdot x$  auf  $(0, 1)$  (dort ist  $\varphi \neq 0$  !) $\implies$  Dgl. für  $u$  gemäß 22.9 :

$$u''(x) + \left(2\frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right) u'(x) = 0$$

oder mit  $v := u'$  :

$$v'(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right) v(x) = 0$$

Lösungsformel :  $v(x) = \exp\left(\text{Stammfunktion zu } \frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)$  (vgl. Satz 22.4)

$$\implies v(x) = \exp\left(-2 \cdot \ln x - \ln(1-x^2)\right) = \frac{1}{x^2 \cdot (1-x^2)}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\implies u(x) = \int v(x) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Es folgt :  $\Psi(x) = x \cdot u(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$ .

Bei der Anwendung von 22.9 mußten wir uns auf ein Intervall  $J \subset (-1, 1)$  ohne Nullstelle von  $\varphi(x) = x$  beschränken, also etwa auf  $(0, 1)$ .

Eine Probe zeigt aber :

$\Psi(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$  ist auf  $(-1, 1)$  definierte Lösung der Dgl. und spannt mit  $\varphi$  den Lösungsraum auf.

### 5) **Lineare Systeme 1<sup>ter</sup> Ordnung mit konstanten Koeffizienten und (lineare Gleichungen n<sup>ter</sup> Ordnung mit konstanten Koeffizienten)**

Sind im Prinzip die einzigen Fälle, für die es systematische Methoden zur Bestimmung von Fundamentalsystemen gibt.

Betrachte das System

$$(1) \quad y' = A y, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit **konstanter**  $n \times n$  - Matrix  $A = (a_{ij})$ ;

*Lösungen existieren auf ganz  $\mathbb{R}$  (nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz)*

Fall  $n = 1$  :

$$y' = a \cdot y \text{ mit } a \in \mathbb{R} \implies y(x) = e^{ax} \text{ ist Lösung (dim des Lösungsraumes } \equiv 1)$$

Deshalb machen wir den Exponentialansatz :

$$(2) \quad \boxed{y(x) = e^{\lambda x} v, \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

dann ist :

$$y'(x) = \lambda \cdot y(x),$$

also gilt :

$$\begin{aligned} y'(x) &= A y(x) \\ \iff \lambda e^{\lambda x} v &= e^{\lambda x} A v \\ \iff \boxed{Av = \lambda v} & \quad v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda \end{aligned}$$

D.h. : Wir müssen zur Lösung von (1) mit dem Ansatz (2) **Eigenwerte** von  $A$  und **Eigenvektoren** bestimmen.

Da die Eigenwerte reeller Matrizen auch komplex sein können, betrachten wir zunächst die

$$\text{komplexe Situation : } \begin{cases} A \in \mathbb{C}^{n \times n} & \text{komplexe } n \times n \text{ Matrix} \\ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, & y' = A y \text{ auf } \mathbb{R} \end{cases}$$

Dann gilt wie oben mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$  :

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x} v \text{ Lsg.} \iff \lambda \text{ E.W. von } A, v \text{ E.V. zu } \lambda}$$

Die Eigenwerte von  $A$  ergeben sich als Nullstellen des

**charakteristischen Polynoms**  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id})$ .

$P_A(\lambda)$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  über  $\mathbb{C}$

$\implies \exists n$  Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  von  $P_A(\lambda)$  nicht notwendig alle verschieden, d.h. es können Vielfachheiten  $> 1$  auftreten.

Fassen wir die Ergebnisse in folgenden Satz zusammen :

**Satz 22.10 :**

*Die Funktion  $y(x) = e^{\lambda x} v$  ist Lösung genau dann, wenn  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $A$  und  $v \in \mathbb{C}^n$  ein zugehöriger Eigenvektor ist. Die Lösungen  $e^{\lambda_k x} v_k$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{C}$  genau dann, wenn die Vektoren  $v_k$  linear unabhängig sind.*

Speziell :

$$\lambda_k \neq \lambda_\ell \implies y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k, y_\ell(x) = e^{\lambda_\ell x} v_\ell \text{ sind linear unabhängig.}$$

**Beweis der letzten Aussage :**

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ ,  $M \leq n$ , komplexe Eigenwerte (nicht notwendig alle verschieden),  $w_1, \dots, w_M$  zugehörige E.V.  $\in \mathbb{C}^n$ . Setze

$$y_\ell(x) = e^{\alpha_\ell x} w_\ell \quad \text{und} \quad y(x) = \sum_{\ell=1}^M \beta_\ell y_\ell(x) \text{ mit Koeffizienten } \beta_\ell \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt :

$$y' = A y \quad \text{und} \quad y(0) = \sum_{\ell=1}^M \beta_\ell w_\ell.$$

Außerdem :

$\{w_1, \dots, w_M\}$  linear abhängig

$$\iff y(0) = 0 \quad \text{für passende Wahl von } \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C} \text{ nicht alle } 0$$

$$\iff y \equiv 0 \quad \text{nach dem Eindeutigkeitssatz 22.1, der auch in der } \mathbb{C}^n \text{ - wertigen Situation gilt (da } \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n})$$

$$\iff y_1, \dots, y_M \text{ sind linear abhängig}$$

Dass für Eigenwerte  $\mu \neq \lambda$  die Lösung linear unabhängig sind, folgt aus der Unabhängigkeit der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

□

**Korollar** (“Idealfall”) :

Besitzt  $A$   $n$  **linear unabhängige Eigenvektoren**  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  (nicht notwendig verschieden), so bilden die Funktionen  $\mathbf{y}_k(\mathbf{x}) = e^{\lambda_k \mathbf{x}} \mathbf{v}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ein **Fundamentalsystem über  $\mathbb{C}$** , d.h. jede Lösung  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  läßt sich aus  $y_1, \dots, y_n$  erzeugen. Das gilt insbesondere dann, wenn es  $n$  verschiedene Eigenwerte gibt.

**Bemerkung :**

Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$  kommt nur 1 als Eigenwert mit Vielfachheit  $n$  vor, der Eigenraum von 1 ist trivialerweise  $n$  dimensional.

**Wie kommt man zu reellen Lösungen, wenn  $A$  reell ist?**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $A$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$  Eigenvektor zu  $\lambda$

$$\implies y(x) = e^{\lambda x} v \text{ ist Lösung.}$$

Schreibe

$$\lambda = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}; v = u + iw, u, w \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \implies e^{\lambda x} v &= e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) (u + iw) \\ &= \underbrace{e^{\alpha x} (\cos(\beta x)u - \sin(\beta x)w)}_{:=z(x)} + i \underbrace{e^{\alpha x} (\sin(\beta x)u + \cos(\beta x)w)}_{:=z^*(x)} \end{aligned}$$

$$\implies z'(x) = Az(x), z^{*'}(x) = Az^*(x)$$

Ein komplexer Eigenwert liefert also **zwei** reelle Lösungen.

beachte :

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert, } v \text{ Eigenvektor zu } \lambda \implies \bar{\lambda} \text{ Eigenwert, } \bar{v} \text{ Eigenvektor zu } \bar{\lambda}$$

für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ist  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ , also  $v$  und  $\bar{v}$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{C}$ , d.h.  $\operatorname{Re} v$ ,  $\operatorname{Im} v$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{R}$

$$\implies z, z^* \text{ sind linear unabhängig über } \mathbb{R} \text{ (der E.W. } \bar{\lambda} \text{ ergibt } -z, -z^* \text{ als reelle Lösungen!)}$$

**Satz 22.11 :** (Reeller Fall)

Sei  $A$  reelle  $n \times n$  Matrix,  $\lambda = \mu + iv$  komplexer E.W.,  $v = a + ib \in \mathbb{C}^n$  ein zugehöriger E.V. Dann sind

$$(3) \quad \begin{cases} z(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x} v) = e^{\mu x} (\cos \nu x \cdot a - \sin \nu x \cdot b) \\ z^*(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x} v) = e^{\mu x} (\sin \nu x \cdot a + \cos \nu x \cdot b) \end{cases}$$

zwei über  $\mathbb{R}$  linear unabhängige Lösungen von (1) mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ .

□

Damit läßt sich die reelle Situation so beschreiben

**Korollar :** "es gibt genügend viele E.V."

Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$  Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $s_1, \dots, s_q \in \mathbb{R}$ . Seien  $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{C}^n$  ( $n=2p+q$ ) E.V.'en zu  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , und  $d_1, \dots, d_q$  E.V.'en zu  $s_1, \dots, s_q$ . Sind dann die Vektoren  $\operatorname{Re} v_1, \dots, \operatorname{Re} v_p, \operatorname{Im} v_1, \dots, \operatorname{Im} v_p, d_1, \dots, d_q$  **linear unabhängig über  $\mathbb{R}$** , so gewinnt man ein reelles Fundamentalsystem durch Benutzen von (3) (für  $v$  und  $\lambda$ ) und (2) (für  $d$  und  $s$ ).

**Beispiel :**

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_3 \\ y_3' = 4y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases}, \text{ also}$$

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} y(x)$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \operatorname{Id}) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

$$\text{Eigenwerte : } \underbrace{-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\lambda}, \underbrace{-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\bar{\lambda}}, \underbrace{1}_{=s}$$

$$\text{Eigenvektoren : } \underbrace{\left(\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{7}, 2, 4\right)}_{=v}, \underbrace{\left(\frac{3}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{7}, 2, 4\right)}_{=\bar{v}}, \underbrace{(1, 0, 2)}_{=d}$$

**Lösungen dazu :**

$$y(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x} v) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z^*(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x} v) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

weitere Beispiele  $\rightarrow$  Übungen !

**Problem :**

was macht man in Fällen, wo sich nicht genügend viele linear unabhängige E.V.'en ausrechnen lassen?

**Beispiel :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

einzigster E.W.  $-1$  mit Vielfachheit 2, nur ein E.V., nämlich  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

*Hier versagt offensichtlich das Korollar, und das ist immer der Fall, wenn*

$$\dim(\text{Eigenraum zu } \lambda) < \text{Vielfachheit von } \lambda \text{ in } P_A.$$

### 1. Möglichkeit : “Jordan-Form”

Bringe  $A$  auf Jordan-Form und erhalte daraus Formeln für ein Fundamentalsystem ( $\rightarrow$  Literatur).

### 2. Möglichkeit : “Exponentialfunktion für Matrizen”

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Man setzt

$$\boxed{\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k},$$

wobei  $A^k$  das  $k$ -fache Matrizenprodukt bezeichnet. Wählen wir

$$\|A\| := \sup_{|v| \leq 1} |Av| \quad (\text{Operatornorm}),$$

so ist

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

woraus die Konvergenz der Reihe folgt.

Sodann rechnet man nach :

i)  $e^A := \exp(A)$  ist immer regulär :  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

ii) 
$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

iii)  $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$

iv)  $e^{A+s\text{id}} = e^s e^A$ ,  $s \in \mathbb{R}$

v)  $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

vi)  $S$  regulär  $\implies S e^A S^{-1} = \exp(S A S^{-1})$

vii)  $\left. \begin{array}{l} A \text{ nilpotent, d.h.} \\ A^m = 0 \text{ für ein } m \end{array} \right\} \implies e^A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A^k$

viii)  $t \mapsto e^{tA}$  ist differenzierbar mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA}}$$

**Satz 22.12 :**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Die **eindeutige Lösung** des linearen Systems

$$\begin{aligned} y(t_0) &= \eta_0 \\ y'(t) &= A y(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist

$$t \mapsto \underbrace{\exp((t - t_0)A)}_{\text{Matrix}} (\eta_0)$$

**Beweis :**

Eindeutigkeit klar! Nun zeige, dass diese Funktion das AWP löst.

**Korollar :**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Ein **Fundamentalsystem** zu  $y' = Ay$  wird gegeben durch

$$t \mapsto \exp(tA)e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $\{e_i\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet (i.A. die kanonische Basis).

**Beispiel :**

$A$  nilpotent,  $A^m = 0$

$$\implies t \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} t^k A^k(e_i), \quad i = 1, \dots, n$$

ist Fundamentalsystem.

**Bemerkung :**

Die explizite Berechnung von  $e^{tA}$  ist i.a. nicht möglich; um zu verwertbaren Ergebnissen zu gelangen, ist man gezwungen, auf die Jordan'sche Normalform von  $A$  zurückzugehen (→ Literatur!)

**Lineare Gleichungen n<sup>ter</sup> Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

$$(1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  für  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

⇕

$$(1)^* \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot Y \quad \text{für } Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

beachte :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \left\{ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \right\} \quad (\text{Polynom über } \mathbb{C})$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  ergibt sich als Koeffizientenpolynom der Gleichung (1). Durch Spezialisieren der allgemeinen Ergebnisse auf (1)\* bekommt man

**Satz 22.13 :** (Fundamentalsystem zu (1))

i) Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Nullstelle von  $P_A$  mit Vielfachheit  $k$ . Dann sind die Funktionen  $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$  linear unabhängige Lösungen von (1).

ii) Verfährt man gemäß(i) für die verschiedenen Nullstellen  $\lambda$  von  $P_A$ , so bekommt man ein komplexes Fundamentalsystem.

iii) Reeller Fall : Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ .

Ist  $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  Nullstelle von  $P_A$  ( $\implies \bar{\lambda}$  ebenfalls Nullstelle), so spaltet man die Lösung aus (i) in Re und Im auf und erhält die  $2^k$  reellen Funktionen

$$\boxed{x^q e^{\mu x} \cos(\nu x), x^q e^{\mu x} \sin(\nu x), q = 0, \dots, k-1}$$

(Die zu  $\bar{\lambda}$  gehörigen komplexen Lösungen liefern dieselben reellen Lösungen und bleiben deshalb unberücksichtigt!).

Ist  $\alpha$  reelle Nullstelle mit Vielfachheit  $\ell$ , so bekommt man daraus die Lösungen

$$\boxed{x^p e^{\alpha x}, p = 0, \dots, \ell-1}.$$

Verfährt man so für alle Nullstellen, so ergibt sich ein reelles Fundamentalsystem.

**Bemerkung :**

Man kann 22.13 ohne Rückgriff auf Jordan-Formen direkt beweisen.

**Beispiel :**

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + 8y' + 16y \equiv 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda + 2)^3 (\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\ &= (\lambda + 2)^3 (\lambda - 1 + i) (\lambda - 1 - i) \end{aligned}$$

→ Fundamentalsystem :  $e^{-2x}, x \cdot e^{-2x}, x^2 \cdot e^{-2x}, e^x \cdot \sin x, e^x \cdot \cos x$

→ Übung : ausführliche Diskussion der “gedämpften Schwingungen”

$$y'' + 2ay' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$$

□

## §18

# Differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher

**Ziel:** Übertragung des Konzepts der Differenzierbarkeit für Funktionen  $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^k$  auf Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit  $n, N \geq 1$ .

1<sup>te</sup> Möglichkeit: bilde partielle Ableitungen durch Festhalten aller bis auf eine Variable

beachte aber schon jetzt:  $\left. \begin{array}{l} \text{Existenz aller partiellen Ableitungen an einer Stelle } a \\ \not\Rightarrow \text{ Stetigkeit von } f \text{ in } a \end{array} \right|$

Also ist “partielle Differenzierbarkeit” noch nicht der richtige Begriff.

**Definition 18.1 :** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

a) Sei  $a \in U$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Wenn der Limes  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a + h e_i) - f(a)] = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(a + t e_i)$  existiert, so nennt man ihn die partielle Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  in der  $i$ ten Koordinatenrichtung.

Schreibweise:  $\partial_i f(a)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ , etc. (hierbei:  $e_i = (0 \dots 1 \dots 0) \in \mathbb{R}^n$ )

b)  $f$  heißt auf  $U$  (stetig) partiell differenzierbar, falls  $\partial_i f(x)$  für alle  $x \in U$  und  $1 \leq i \leq n$  existiert (und eine stetige Funktion von  $x$  ist)

**Bemerkungen:**

1) Will man  $\partial_i f(a)$  ausrechnen, so bildet man die Funktion einer reellen Veränderlichen

$$\varphi : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

und untersucht, ob  $\varphi'(a_i)$  existiert. Es ist ja

$$\begin{aligned}\varphi'(a_i) &= \lim_{\text{Def}} \frac{1}{h} \left( \varphi(a_i + h) - \varphi(a_i) \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( f(a + h e_i) - f(a) \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(a + t e_i)\end{aligned}$$

und den Wert rechts haben wir  $\partial_i f(a)$  genannt.

- 2) Wir kennen Diff'barkeit von Funktionen  $g$  einer Veränderlichen mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Ist  $g$  vektorwertig, so wird  $g'(t)$  natürlich komponentenweise definiert.
- 3) Da die partiellen Ableitungen die gewöhnlichen Ableitungen der partiellen Funktionen sind, gelten alle Rechenregeln.

### Beispiele:

- 1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y\end{aligned}$$

nach Kettenregel

also:  $f$  stetig partiell differenzierbar

- 2)  $n \geq 2$ ,  $f(x) = |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$f$  ist an jeder Stelle  $x \neq 0$  partiell diff'bar mit

$$\partial_i f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sum \dots}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{|x|}.$$

- 3) partielle Diff'barkeit  $\not\Rightarrow$  Stetigkeit

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \end{cases}$$

- i)  $f$  ist unstetig in  $(0, 0)$ , vgl. Bspl. 2) nach Satz 16.12
- ii) an jeder Stelle  $(x, y) \neq (0, 0)$  existieren die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2 + y^2} + 2y \frac{1}{x^2 + y^2} = \\ &= 2xy \cdot 2x \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} + 2y \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} 2y(y^2 - x^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \dots = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} 2x(x^2 - y^2).\end{aligned}$$

$$\text{iii) } \quad \text{gemäß } \frac{1}{h} \left( f(h, 0) - f(0, 0) \right) = 0,$$

$$\frac{1}{h} \left( f(0, h) - f(0, 0) \right) = 0$$

existieren auch  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  mit Wert 0.

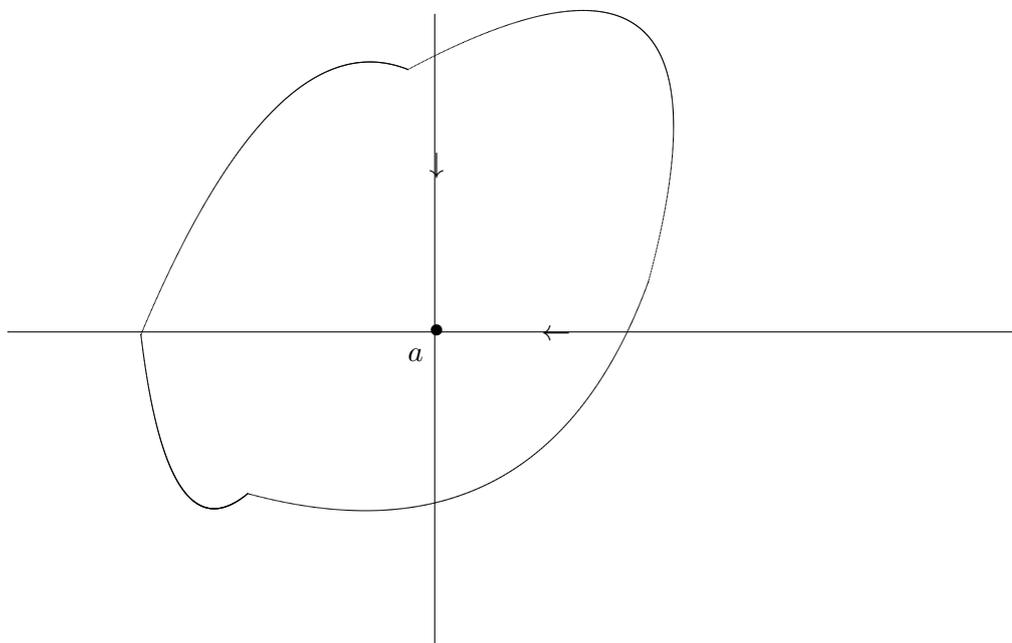
Man beachte außerdem:  $\partial f / \partial x$  und  $\partial f / \partial y$  sind nicht stetig auf  $\mathbb{R}^2$ .

### Erklärung für das Phänomen in Bspl. 3):

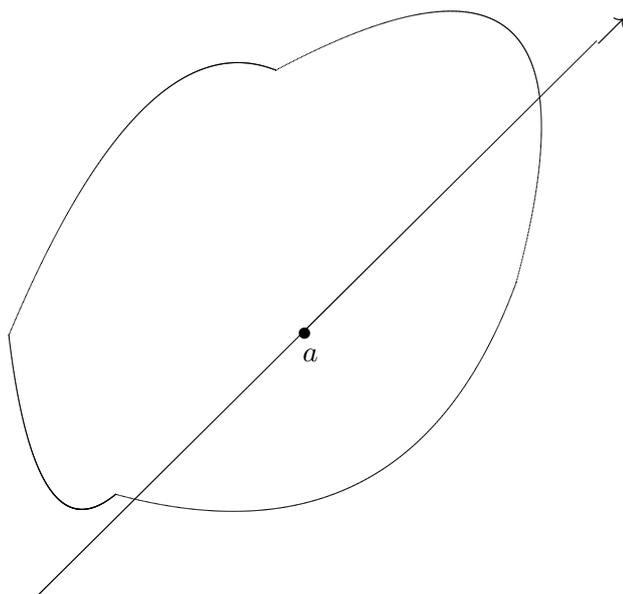
Stetigkeit von  $f$  in  $a \in U \subset \mathbb{R}^n \iff$  “Wohlverhalten von  $f$  in einer ganzen Umgebung von  $a$ ”

Existenz von  $\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a) \iff$  “Wohlverhalten von  $f$  nur auf achsenparallelen Geraden durch  $a$ ”,

und dies ist einfach zu wenig Information im Fall  $n \geq 2$ ! Die partiellen Funktionen sind natürlich allesamt stetig in  $a$ .



Eine naheliegende Idee: betrachte Ableitungen von  $f$  längs beliebiger durch  $a \in U$  verlaufender Geraden  $f \mapsto a + tv$  mit Richtungsvektor  $v \in \mathbb{R}^n$  und nicht nur längs spezieller Geraden  $t \mapsto a + te_i, i = 1, \dots, n$ .



**Definition 18.2 :** Richtungsableitungen

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Existiert dann  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + tv) - f(a)) = \frac{d}{dt|_0} f(a + tv)$ ,

so nennt man ihn die Richtungsableitung von  $f$  in  $a$  nach  $v$

Schreibweise:  $\partial_v f(a)$ ,  $D_v f(a)$

**Bemerkungen:** 1)  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{e_i} f(a)$ ,  $i = 1, \dots, n$  (wenn existent)

2)  $\partial_v f(a)$  existiert  $\implies \partial_{\lambda v} f(a)$  existiert mit  $\partial_{\lambda v} f(a) = \lambda \partial_v f(a)$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

Beweis:  $\lambda \neq 0 \implies \frac{1}{h} (f(a + h\lambda v) - f(a)) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda h} (f(a + (\lambda h)v) - f(a)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda \partial_v f(a)$ .

□

Aber:  $\partial_v f(a)$  existiert für alle  $v \in \mathbb{R}^n \not\Rightarrow f$  stetig in  $a$

Um den üblichen Schluß "Diff'barkeit in  $a \implies$  Stetigkeit in  $a$ " zu vollziehen, reicht es also nicht aus, die Existenz von  $\partial_v f(a)$  für jede Richtung zu verlangen.

**Beispiele dazu:**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2xy^3}{x^2+y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$f$  unstetig in  $(0, 0)$ :  $f(0, 0) = 0,$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\partial_v f(0, 0)$  existiert für alle  $v \in \mathbb{R}^2$ : 0.E.  $v \neq 0$ , also gemäß Bem. 2) nach Def.18.2  $|v| = 1$ .  
Schreibe deshalb

$$\begin{aligned} v = (\cos\Theta, \sin\Theta) &\implies \frac{1}{t} f(tv) = \frac{1}{t} \cdot 2t^4 \cos\Theta \sin^3\Theta / t^2[\cos^2\Theta + t^4 \sin^6\Theta] \\ &= t \frac{2\cos\Theta \sin^3\Theta}{\cos^2\Theta + t^4 \sin^6\Theta} \end{aligned}$$

$$\cos\Theta = 0 \implies \frac{1}{t} f(tv) = 0$$

$$\cos\Theta \neq 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\cos\Theta \sin^3\Theta}{\cos^2\Theta + t^4 \sin^6\Theta} = \frac{2}{\cos\Theta} \cdot \sin^3\Theta,$$

also in jedem Fall

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(tv) = 0,$$

so dass  $\partial_v f(0, 0) = 0$ . □

Dass das Konzept der Richtungsableitung andererseits stärker ist als nur partielle Differenzierbarkeit, zeigt unser altes Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

hier:  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

Sei  $v = (\cos\Theta, \sin\Theta) \implies \frac{1}{t} (f(tv) - f(0, 0)) = \frac{1}{t} \cdot \frac{2t^2 \sin\Theta \cos\Theta}{(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta)} = \frac{1}{t} \sin(2\Theta),$   
so dass  $\partial_v f(0, 0)$  nur für  $\Theta \in \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$  existiert.

**Beispiele für Richtungsableitungen:**

$$1) \quad \partial_{(1,1)} e^{xy} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( e^{(x+h)(y+h)} - e^{xy} \right) =$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{(x+t)(y+t)} = \frac{d}{dt}\Big|_0 \left( e^{x \cdot y} \cdot e^{t(x+y)} e^{t^2} \right) =$$

↑  
Produktregel

$$e^{xy} (x + y) + e^{x \cdot y} \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{t^2}}_{=0} = (x + y) e^{xy}$$

$$2) \quad \partial_v |x|^2 = \frac{d}{dt}\Big|_0 |x + tv|^2 = \frac{d}{dt}\Big|_0 \sum_{i=1}^n (x_i + tv_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i v_i = 2 \langle x, v \rangle$$

für alle  $x, v \in \mathbb{R}^n$ .

hier:  $v \mapsto \partial_v f(x)$  ist lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$3) \quad \partial_v \frac{x}{|x|} = \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{x+tv}{|x+tv|} = x \frac{d}{dt}\Big|_0 |x + tv|^{-1} + v |x|^{-1}$$

$$= -|x|^{-3} \langle x, v \rangle x + |x|^{-1} v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

speziell:  $\partial_x \frac{x}{|x|} = 0$  (warum ist das offensichtlich?)

→ Übungen: weitere Beispiele (Eulersche Relation für homogene Funktionen)

Fazit: | auch die Existenz von  $\partial_v f(a)$  in  $a$  für alle Richtungen  $v \in \mathbb{R}^n$  führt noch nicht zum richtigen Ableitungskonzept, das Stetigkeit von  $f$  bei  $a$  nach sich zieht.

möglicher Ausweg: verlange die Existenz von

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 f(\gamma(t))$$

für alle Kurven  $\gamma$  durch  $a$ , also  $\gamma(0) = a$ , die in 0 differenzierbar sind; bisher:  $\gamma(t) = a + tv$   
man kann zeigen: dann ist  $f$  stetig in  $a$ !

Diese Definition von "Differenzierbarkeit in  $a$ " hat jedoch den Nachteil, dass sie unmöglich nachzuprüfen ist, da man ja alle Kurven  $\gamma$  testen muss.

Bevor wir nun eine vernünftige Definition geben, beschäftigen wir uns noch kurz mit höheren partiellen Ableitungen.

**Definition 18.3 :** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

a)  $f$  sei auf  $U$  partiell nach der  $i^{\text{ten}}$  Variablen differenzierbar, d.h. die Funktion  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist definiert. Existiert dann für ein  $a \in U$  und ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$ , so schreibt man dafür

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a) \quad (\text{Reihenfolge!})$$

b) Sei  $f$  partiell diff'bar nach  $x_1, \dots, x_n$ . Sind alle  $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  wieder partiell diff'bar auf  $U$ , so heißt  $f$  2-mal partiell differenzierbar. In diesem Fall existieren alle Funktionen  $D_j D_i f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Sind die  $2^{\text{ten}}$  partiellen Ableitungen stetig, so nennt man  $f$  2-mal stetig partiell diff'bar. Man beachte die Reihenfolge:  $D_j D_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \right)$ .

**Bemerkungen:**

1) Multiindices  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k \quad (\text{Ordnung})$$

dann: 
$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

wobei 
$$\frac{\partial^k}{\partial x_\ell^k} f := \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_\ell^{k-1}} \right) \quad (\text{rekursiv})$$

Ist  $L \in \mathbb{N}$ , so versteht man unter einer partiellen Ableitung der Ordnung  $L$  einen Ausdruck der Form  $D^\alpha f$  mit  $|\alpha| = L$ .

Achtung: 
$$\text{i.a. } D_i D_j f \neq D_j D_i f$$

**Beispiel:** 
$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{xy}{x^2+y^2} - (x^2 - y^2)^2 \frac{y}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \implies$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) = \frac{d}{dt|_0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \frac{d}{dt|_0} \left( -\frac{t^5}{t^4} \right) = -1.$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \frac{xy}{x^2+y^2} + (x^2 - y^2)^2 \frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = \frac{d}{dt|_0} \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) = \frac{d}{dt|_0} t = +1.$$

2) zum Konzept der partiellen Ableitungen:

die Def. von  $\partial_i f(a)$  zeichnet das Standardkoordinatensystem aus; es ist nicht klar, ob die partiellen Ableitungen auch bei Wechsel des Koordinatensystems existieren! ein vernünftiger Differenzierbarkeitsbegriff sollte invariant sein gegen Koordinatenwechsel ( wie es ja für Stetigkeit der Fall ist).

### Wann kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen?

**Satz 18.1 :** (Schwarz)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Existieren  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  auf  $U$  und ist  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  stetig in  $(a, b) \in U$ , so existiert  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (a, b)$ , und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a, b) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (a, b)$$

**KOROLLAR:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  2-mal stetig partiell differenzierbar auf  $U$ . Dann gilt für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $a \in U$   $D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a)$ .

Ist  $f$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar auf  $U$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ein Multiindex der Ordnung  $\leq k$ , so kommt es bei der Bildung von  $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$  nicht auf die Reihenfolge an.

Übung  $\longrightarrow$  beweise Teil 1 des Korollars

**Beweis des Satzes:** O.E.  $f$  reellwertig,  $(a, b) = (0, 0)$  (für  $(a, b) \neq (0, 0)$  führe eine Translation aus)

Mit  $F(t) = \frac{1}{t} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right)$  ist zu zeigen:

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} F(t) \text{ existiert mit Wert } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0).$$

Dazu sei  $G(u, v) := \frac{1}{u \cdot v} \left( (f(u, v) - f(0, v)) - (f(u, 0) - f(0, 0)) \right) \implies$

$$\lim_{u \rightarrow 0} G(u, v) = \frac{1}{v} \left( \partial_x f(0, v) - \partial_x f(0, 0) \right), \text{ also}$$

$$(2) \quad F(v) = \lim_{u \rightarrow 0} G(u, v).$$

Für  $(u, v)$  nahe  $(0, 0)$  zeigen wir, dass  $G(u, v)$  die Form  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\tilde{u}, \tilde{v})$  hat mit  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  nahe  $(0, 0)$ . Dies kombiniert mit der Stetigkeit von  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  ergibt die Behauptung.

Nun zu den Details:

Sei  $u$  zunächst fest, man setzt  $\varphi(v) := f(u, v) - f(0, v)$  und bekommt

$$G(u, v) = \frac{1}{u} \frac{1}{v} \left[ \varphi(v) - \varphi(0) \right] \stackrel{\text{MWS für } \varphi}{\downarrow} = \frac{1}{u} \varphi'(\alpha \cdot v) \quad \text{mit } \alpha = \alpha(u, v) \in (0, 1).$$

Einsetzen ergibt

$$G(u, v) = \frac{1}{u} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(u, \alpha \cdot v) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \alpha v) \right]$$

$$\left( \text{denn } \varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(u, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, t) \right).$$

Betrachte nun

$$\Psi : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(tu, \alpha \cdot v), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dann:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u, \alpha v) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \alpha v) = \Psi(1) - \Psi(0) \stackrel{\text{MWS für } \Psi}{\downarrow} = \Psi'(\eta) \quad \text{mit } 0 < \eta < 1.$$

Gemäß

$$\Psi'(\eta) = u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\eta u, \alpha v)$$

folgt insgesamt:

$$(3) \quad G(u, v) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\eta u, \alpha v)$$

für alle  $(0, 0) \neq (u, v)$  genügend nahe bei  $(0, 0)$ , wobei  $\eta, \alpha \in (0, 1)$  von  $u, v$  abhängen.

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  ist stetig in  $(0, 0)$ , zu  $\varepsilon > 0$  gibt es daher  $\delta > 0$  mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\alpha, \beta) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) \right| \leq \varepsilon$$

für alle  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \delta$ . (3) liefert

$$\left| G(u, v) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) \right| \leq \varepsilon \quad \forall (u, v) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} \sqrt{u^2 + v^2} \leq \delta \\ \neq \\ 0 \end{array}$$

Beachtet man (2), so folgt (mit  $u \rightarrow 0$ )

$$\left| F(v) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) \right| \leq \varepsilon \quad \forall 0 < |v| \leq \delta.$$

Die Relation (1) liefert dann sofort die Behauptung. □

### (Totale) Differenzierbarkeit

Vereinbarungen:

- 1) alle vorkommenden  $\mathbb{R}$ -Vektorräume  $X$  stellen wir uns automatisch normiert vor; da alle Normen äquivalent sind, spielt es keine Rolle, welche Norm man konkret wählt
- 2) haben wir z.B. auf  $\mathbb{R}^n$  eine spezielle Norm im Auge, so geben wir diese explizit an (meistens die Euklidische Norm)
- 3) Grenzwertbildung: (genau wie in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  mit Norm statt Absolutbetrag)

Sei  $f$  definiert auf  $B_R(a) - \{a\} \subset X$  mit Werten in  $Y$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in Y$  existiert  $\iff$

für jede Folge  $x_n \rightarrow a, x_n \neq a$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  mit  $|f(x) - b| < \varepsilon$  für alle  $x \in B_\delta(a) - \{a\}$

**Definition 18.4 :** (Ableitung)

Seien  $X, Y$   $\mathbb{R}$ -V.R. endlicher Dimension,  $U$  offen  $\subset X$  und  $a \in U$ .

$f : U \rightarrow Y$  heißt (total) differenzierbar in  $a$  :  $\iff$

es gibt eine lineare Abbildung  $L : X \rightarrow Y$  mit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x-a|} \left( f(x) - L(x-a) - f(a) \right) =$$

\*

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{|v|} \left( f(a+v) - L(v) - f(a) \right) = 0.$$

Man schreibt für  $L$  :  $f'(a)$ ,  $Df(a)$

**Bemerkungen:**

- 1) es gibt höchstens eine lineare Abbildung  $L : X \rightarrow Y$  mit \* (Beweis  $\rightarrow$  Übung!)
- 2) Identifikation im Fall  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}^k$ : (bzw.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$ )

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  diff'bar in  $a$  im Sinne der alten Def., d.h.

$$\frac{d}{dt}|_a f = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \in \mathbb{R}^k$$

existiert. Setze  $\ell := \frac{d}{dt}|_a f$  und definiere  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, L(t) := t\ell$

$\implies$   $L$  ist linear und erfüllt \* aus 18.4, d.h.  $f$  ist diff'bar auch im Sinne von 18.4 mit  $Df(a)(t) = t \cdot \frac{d}{dx}|_a f$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Die Umkehrung gilt natürlich auch:  $f$  diff'bar in  $a$  gemäß 18.4

$\implies$   $\frac{d}{dx}|_a f$  existiert mit  $\frac{d}{dx}|_a f = Df(a)$  (1).

Aus diesem Grund liefert 18.4 für  $X = \mathbb{R}$  kein neues Konzept, und man identifiziert  $Df(a)$  mit  $\frac{d}{dx}|_a f$ .

Fall  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$  :

$f$  diff'bar in  $a \implies \exists!$  lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit \*;  
zu  $L$  gibt es genau einen Vektor  $\ell \in \mathbb{R}^n$  mit  $L(v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$  ( $\rightarrow$  Übung)

Umgekehrt: ist  $e \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{|v|} \left( f(a+v) - \langle e, v \rangle - f(a) \right) = 0,$$

so folgt Diff'barkeit von  $f$  in  $a$  mit  $Df(a)(v) = \langle e, v \rangle$ . Deshalb identifiziert man im Fall  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$  die Ableitung  $Df(a)$  mit dem erzeugenden Vektor  $\ell \in \mathbb{R}^n$ .

Später: 
$$\ell = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \right)$$
  
Gradient von  $f$  in  $a$

3) Äquivalent zur Diff'barkeit von  $a$  ist:

Es gibt eine lineare Abbildung  $L : X \rightarrow Y$  und eine in  $a$  stetige Abbildung  $R : U \rightarrow Y$  mit  $R(a) = 0$  und

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + |x - a| \cdot R(x), \quad x \in U.$$

4) Def. 18.4 läßt sich wörtlich auf den Fall normierter Räume  $X, Y$  beliebiger Dimension übertragen. Da dann die Normen nicht mehr notwendig äquivalent sind, hängt die Frage nach Diff'barkeit auch von der konkreten Wahl der Normen ab. Außerdem ergänzt man 18.4 durch die Forderung, dass die lineare Abbildung  $L$  bzgl. der gewählten Normen stetig ist.

□

Der nächste Satz zeigt

**Satz 18.2 :** (Differenzierbarkeit  $\implies$  Stetigkeit)

Sei  $U \subset X$  offen,  $a \in U$  und  $f : X \supset U \rightarrow Y$  diff'bar in  $a$ . Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|f(x) - f(a)| \leq (\|f'(a)\| + \varepsilon) |x - a|$$

für alle  $x \in B_\delta(a) \cap U$ . Speziell folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

also Stetigkeit von  $f$  in  $a$ .

**Bemerkung:**  $\|f'(a)\|$  = Operatornorm von  $f'(a)$  bzgl. der auf  $X, Y$  gewählten Normen.

**Beweis:** Es ist  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x)|x - a|$ ,  $R$  stetig in  $a$ ,  $R(a) = 0$ .  $\implies$

zu  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit  $|R(x)| < \varepsilon, x \in B_\delta(a) \implies$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f'(a)(x-a)| + \varepsilon|x-a| \leq \|f'(a)\| |x-a| + \varepsilon|x-a| \quad \text{auf } B_\delta(a). \quad \square$$

### Beispiele:

- 1) Satz 18.4 (Kriterium für die Existenz von  $f'$ ) ergibt eine Vielzahl von Beispielen ohne Rückgriff auf Def.18.4.
- 2) Wir zeigen mit dem folgenden Beispiel, dass es begrifflich besser ist, in Def. 18.4 Räume endlicher Dimension  $X, Y$  zu betrachten, statt sich auf  $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^N$  festzulegen. Dann müßte man immer sagen:  $X$  und  $Y$  sind isomorph zu  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N$  mit gewissen  $n, N$ , und  $f : X \rightarrow Y$  ist diff'bar in  $a$ , wenn dies (an entsprechender Stelle) für die zugehörige Abbildung  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  gilt. Außerdem hat man sich davon zu überzeugen, dass alles nicht davon abhängt, welche Isomorphismen man wählt. Das sind natürlich keine tiefgehenden Überlegungen, lassen sich aber mit unserem Konzept vermeiden.

Seien jetzt  $X = Y = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) =$

Vektorraum aller linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

versehen mit der

Operatornorm  $\|A\| = \sup \{|Av| : |v| \leq 1\}$

$$|v| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (\text{Eukl. Norm}).$$

Setze  $f : X \rightarrow X, f(A) := A \circ A$ .

Wir fixieren  $A \in X$  und betrachten

$$f(A+B) = (A+B) \circ (A+B) = A \circ A + A \circ B + B \circ A + B \circ B$$

$$\implies f(A+B) - f(A) = \underbrace{A \circ B + B \circ A}_{=: L(B)} + B \circ B$$

Die Abbildung

$$L : X \rightarrow X, L(B) := A \circ B + B \circ A,$$

ist linear; betrachte man  $\|B \circ B\| \leq \|B\|^2$ , so folgt:

$$\frac{1}{\|B\|} \|f(A+B) - f(A) - L(B)\| \leq \|B\| \longrightarrow 0$$

bei  $\|B\| \rightarrow 0$ , d.h.  $f$  ist in  $A$  diff'bar mit  $f'(A) : X \rightarrow X$

gegeben durch  $f'(A)(B) = L(B)$ . □

**Satz 18.3 :** Sei  $U$  offen in  $X$ ,  $a \in U$  und  $f : U \rightarrow Y$  differenzierbar in  $a$ .

Dann existieren für alle  $v \in X$  die Richtungsableitungen  $\frac{d}{dt}\bigg|_0 f(a + tv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + hv) - f(a))$  und sind gegeben durch  $f'(a)v$ .

**Beweis:** Für  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$  genügend klein und  $v \in X$  ist

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} (f(a + hv) - f(a)) - f'(a)v \right| \stackrel{\text{O.E. } v \neq 0}{=} \\ & \frac{1}{|hv|} \left| f(a + hv) - f(a) - f'(a)(hv) \right| \cdot |v| = |R(a + hv)| \cdot |v| \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Restglieddarstellung benutzt haben. □

**KOROLLAR:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $a \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  differenzierbar.

- (i) Für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  existieren die Richtungsableitungen  $\partial_v f(a)$ .  $v \mapsto \partial_v f(a)$  ist linear. Insbesondere existieren alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), i = 1, \dots, n$ .
- (ii) Sei  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = a$ , die in  $0$  differenzierbar ist. Dann existiert  $\frac{d}{dt}\bigg|_0 f(\gamma(t))$  mit Wert  $f'(a)(\gamma'(0))$ .

→ Übung: Beweis von (ii)

Wie schon einmal bemerkt, kann man (ii) des Korollars wie folgt umkehren:

Ist  $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^N$  in  $a$  längs jeder differenzierbaren Kurve  $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(0) = a$ , differenzierbar, d.h.  $\frac{d}{dt}|_0 f(\gamma(t))$  existiert, und ist die Zuordnung 
$$\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \frac{d}{dt}|_0 f(a + tv)$$
 linear, so folgt die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $a$ .

□

Der folgende Satz erlaubt eine einfache Entscheidung, ob gegebene Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  differenzierbar sind und liefert damit natürlich direkt viele Beispiele für differenzierbare Funktionen.

**Satz 18.4 :** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  sei auf  $U$  einmal stetig partiell differenzierbar, d.h.  $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$  existieren auf  $U$  und sind stetig. Dann ist  $f$  an jeder Stelle  $x \in U$  differenzierbar.

**Beweis:** Es gilt  $f$  differenzierbar in  $a$  mit Ableitung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N \iff$  jede Komponente  $f_1, \dots, f_N$  ist in  $a$  differenzierbar mit Ableitung  $\ell_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\ell_j(v) = \langle \eta_j, v \rangle$  für genau einen Vektor  $\eta_j \in \mathbb{R}^n$  ( $\eta_j = (\partial_1 f_j(a), \dots, \partial_n f_j(a))$ ) s.u. Der Zusammenhang ist ( $v \in \mathbb{R}^n$ )

$$L(v) = (\ell_j(v))_{1 \leq j \leq N} = (\langle \eta_1, v \rangle, \dots, \langle \eta_N, v \rangle) \in \mathbb{R}^N$$

also:

$$f'(a)(v) = \left( \underbrace{f'_j(a)}_{\text{lin. Abb. } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}}(v) \right)_{1 \leq j \leq N}$$

Sei deshalb O.E.  $f$  reellwertig.

Sei  $a \in U$  fest. Als Kandidat für  $f'(a)$  kommt nur die lineare Abbildung

$\ell : \mathbb{R}^n \ni v \rightarrow \sum_{i=1}^n v_i \cdot \partial_i f(a) \in \mathbb{R}$  in Frage. Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis. Für  $v \in \mathbb{R}^n$  sei

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(j)} := \sum_{i=1}^j v_i e_i = (v_1, \dots, v_j, 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n, \\ 1 \leq j \leq n, \\ v^{(0)} := 0. \end{array} \right.$$

Dann gilt

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{j=1}^n [f(a+v^{(j)}) - f(a+v^{(j-1)})]$$

Mit  $\varphi_j(t) := f(a+v^{(j-1)} + tv_j e_j)$  ist

$$[\dots] = \varphi_j(1) - \varphi_j(0) \stackrel{\uparrow}{=} \text{MWS}$$

$\varphi_j'(\vartheta_j)$  für ein  $\vartheta_j \in (0, 1)$

Die Ableitung  $\varphi_j'(\vartheta_j)$  existiert nach Voraussetzung mit Wert

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f \left( a + v^{(j-1)} + \vartheta_j v_j e_j \right) \cdot v_j$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|v|} \left| f(a+v) - f(a) - \sum_{j=1}^n v_j \partial_j f(a) \right| = \\ & \frac{1}{|v|} \left| \sum_{j=1}^n v_j \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( a + v^{(j-1)} + \vartheta_j v_j e_j \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\} \right| \leq \\ & \sum_{j=1}^n \left| \partial_j f \left( a + v^{(j-1)} + \vartheta_j v_j e_j \right) - \partial_j f(a) \right| \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von  $\partial_j f$  bei  $a$  ergibt: zu  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  mit

$$\left| \partial_j f(a+w) - \partial_j f(a) \right| \leq \varepsilon/n, \quad |w| \leq \delta.$$

Wählt man also  $|v| \leq \delta$  und beachtet  $0 \leq \vartheta_j \leq 1$ , so folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung** eine Beweisdurchsicht zeigt

$$f \text{ partiell diff'bar auf Umg. von } a, \partial_j f \text{ stetig in } a \implies f \text{ diff'bar in } a$$

**NOTATIONEN:** hier sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit Komponenten  $f_1, \dots, f_N$

**Gradient:**  $f$  reellwertig, also  $N = 1$ ; der Vektor

$$\nabla f(a) := \text{grad } f(a) := \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient von  $f$  an der Stelle  $a$ , und er ist definiert allein unter der Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen  $\partial f / \partial x_i(a)$  existieren.

**Bedeutung:** ist  $f$  differenzierbar in  $a$ , so stellt  $\nabla f(a)$  die lineare Abbildung  $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. des Skalarprodukts dar

$$f'(a)v = \langle \nabla f(a), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

(denn: 18.3  $\implies f'(a)(v) = \sum_{i=1}^n v_i f'(a)(e_i) = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f(a)$ .)

Nach 18.3 ist  $f'(a)v = \partial_v f(a)$ , also

\*  $|\partial_v f(a)| \leq |\nabla f(a)| \cdot |v| \leq |\nabla f(a)|$  (Eukl. Norm !) für  $|v| = 1$ . Falls  $\nabla f(a) \neq 0$ , so hat  $\bar{v} = \nabla f(a) / |\nabla f(a)|$  Länge 1, und man bekommt

$$|\partial_{\bar{v}} f(a)| = |\nabla f(a)|$$

Gemäß\* sieht man, dass  $\bar{v}$  den Anstieg maximal macht. Redeweise deshalb:  $\nabla f(a)$  gibt die Richtung des steilsten Anstiegs.

### Vektorfelder auf $U$

sind per Definition Abbildungen  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Man nennt  $F$  Gradientenfeld, falls eine auf  $U$  partiell differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $F = \nabla f$ .

$U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei partiell differenzierbares Vektorfeld

$$\text{rot } F := \left( \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \right)$$

ist ein neues Vektorfeld, genannt Rotation von  $F$ .

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal stetig partiell differenzierbar, so gilt nach Satz 18.1  $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f$ , also

$$\text{rot } (\nabla f) = 0 .$$

Notwendig dafür, dass ein Vektorfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Gradientenfeld ist, ist das Verschwinden der Rotation:  $\text{rot } F = 0$ .

Für allgemeine Mengen  $U$  gilt die Umkehrung nicht, wohl aber für konvexe offene Mengen  $U \subset \mathbb{R}^3$  ( $\rightarrow$  Analysis III).

**Divergenz von Vektorfeldern:**  $F : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\boxed{\operatorname{div} F(a) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(a) \in \mathbb{R},}$$

falls die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(a), i = 1, \dots, n$  in  $a$  existieren formal:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F \quad \text{Skalarprodukt}$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F \quad \text{Kreuzprodukt in } \mathbb{R}^3$$

mit dem formalen Vektor  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ .

Durch Kombination der Operatoren gewinnt man neue, z.B. den Laplace-Operator

$$\boxed{\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}$$

für 2mal partiell differenzierbare  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\rightarrow \text{Übung: } \left\{ \begin{array}{l} \Delta |x|^{2-n} = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad n \geq 3, \\ \Delta \ln |x| = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 - \{0\} \\ |x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \end{array} \right.$$

Jacobi-Matrix: Sei  $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^N$  differenzierbar in  $a$ .

Dann wird  $f'(a)$  bzgl. der kanonischen Basen dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f^1(a) & \dots & \partial_n f^1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^N(a) & \dots & \partial_n f^N(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f^1(a) \\ \vdots \\ \nabla f^N(a) \end{pmatrix} = \left( \partial_1 f(a) \dots \partial_n f(a) \right)$$

mit  $N$  Zeilen und  $n$  Spalten. Es gilt

$$f'(a)v = \begin{pmatrix} \dots \\ \partial_i f^j(a) \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\nabla f^1(a) \bullet v, \dots, \nabla f^N(a) \bullet v)$$



“Spaltenvektor”

“•” Skalarprodukt

wird ausgerechnet gemäß

“Zeile  $\times$  Spalte”  $\rightarrow$  Matrizenprodukt

(korrekterweise müßte nach dem 2<sup>ten</sup> “=” ein Spaltenvektor stehen !)

Man nennt obige Matrix die Jacobi- oder Funktionalmatrix von  $f$  in  $a$  und identifiziert sie mit  $f'(a)$ . Für  $N = 1$  ist die Matrix einzeilig und entspricht dem Vektor  $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ , für  $n = 1$  ist sie einspaltig und entspricht dem Tangentenvektor an  $f$  in  $a$ .

## §19

# Eigenschaften differenzierbarer Funktionen mehrerer Veränderlicher - Anwendungen

Wir beginnen mit den Rechenregeln. Diese sind ähnlich zum reellen Fall, auch die Beweise verlaufen nach bekanntem Muster.

→ Vereinbarung:  $X, Y, \dots \mathbb{R}$ - Vektorräume,  $\dim < X$ , irgendwie normiert

**Satz 19.1 a:** Sei  $U \subset X$  offen,  $a \in U$ ,  $f, g : U \rightarrow Y$  differenzierbar in  $a$ .

Dann gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :  $\alpha f + \beta g : U \rightarrow Y$  ist differenzierbar in  $a$  mit

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta \cdot g'(a)}$$

(wobei Addition und Multiplikation mit Skalaren für Elemente von  $L(X, Y)$  wie üblich definiert ist.)

**Beweis:** “Dreiecksungleichung”

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|v|} \left| (\alpha f + \beta g)(a+v) - (\alpha f + \beta g)(a) - \alpha f'(a)(v) - \beta g'(a)v \right| \leq \\ & |\alpha| \underbrace{\frac{1}{|v|} \left| f(a+v) - f(a) - f'(a)v \right|}_{\rightarrow 0} + |\beta| \underbrace{\frac{1}{|v|} \left| g(a+v) - g(a) - g'(a)v \right|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

bei  $|v| \rightarrow 0$

□

**Satz 19.1 b:** (Komponentenweise Diff'barkeit)

Sei  $U \subset X$  offen,  $a \in U$ ,  $f : U \rightarrow Y$ ,  $g : U \rightarrow Z$  seien differenzierbar in  $a$ .  $(f, g)$  bezeichne die Abbildung  $U \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in Y \times Z$ . Dann gilt:  $(f, g)$  ist in  $a$  differenzierbar mit

$$(f, g)'(a)(v) = (f'(a)(v), g'(a)(v)) \in Y \times Z.$$

umgekehrt folgt aus der Differenzierbarkeit von  $(f, g)$  in  $a$  die von  $f$  und  $g$ .

**Beweis:**  $\rightarrow$  Übung!

Anwendung: benutze 19.1b + Induktion, um zu sehen

$$\left| \begin{array}{l} f : U \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ diff'bar in } a \iff \\ f_1, \dots, f_N : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ diff'bar in } a \end{array} \right.$$

Im Fall  $U \subset \mathbb{R}^n$  hat man die Formel:

$$\left| \begin{array}{l} f'(a)(v) = \sum_{i=1}^N \langle \nabla f_i(a), v \rangle E_i, \quad v \in \mathbb{R}^n, \\ E_i = \text{Standardbasis in } \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

**Satz 19.1 c:** Seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a \in U \subset X$ .

Dann ist  $f \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a$  mit

$$(f \cdot g)'(a) = g(a) f'(a) + f(a) g'(a).$$

(Produktregel)

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|v|} \left| f(a+v) g(a+v) - f(a) g(a) - g(a) f'(a) v - f(a) g'(a) v \right| = \\
 & \frac{1}{|v|} \left| g(a+v) (f(a+v) - f(a) - f'(a) v) \right. \\
 & \left. + g(a+v) f(a) + g(a+v) f'(a) v - g(a) f'(a) v \right. \\
 & \left. - f(a) g(a) - f(a) g'(a) v \right| \leq \\
 & |g(a+v)| \cdot \frac{1}{|v|} \left| f(a+v) - f(a) - f'(a) v \right| + \\
 & |f(a)| \cdot \frac{1}{|v|} \left| g(a+v) - g(a) - g'(a) v \right| + \\
 & \left| g(a+v) - g(a) \right| \cdot \frac{1}{|v|} \left| f'(a) v \right| =: 1 + 2 + 3
 \end{aligned}$$

Es gilt:

- 1  $\rightarrow 0$ , da  $g$  stetig und  $f$  diff'bar in  $a$
- 2  $\rightarrow 0$ , da  $g$  diff'bar in  $a$
- 3  $\rightarrow 0$ , da  $g$  stetig und  $\frac{1}{|v|} |f'(a) v| \leq \|f'(a)\|$ .

□

**Bemerkungen:** 1) In Gradientenschreibweise lautet die Produktregel

$$\boxed{\nabla(g \cdot f)(a) = f(a) \nabla g(a) + \nabla f(a) g(a) .}$$

2) Es gibt viele andere Produktregeln:

$$f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \langle f, g \rangle'(a) = ?$$

$$\text{hier: } \langle f, g \rangle(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(x) \quad \text{Eukl. Skalarprodukt in } \mathbb{R}^N.$$

wende auf  $f_i \cdot g_i$  den Satz an  $\implies$

$$\langle f, g \rangle'(a) = \sum_{i=1}^N g_i(a) f_i'(a) + g_i'(a) f_i(a)$$

bzw. im Fall  $U \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\left| \begin{array}{l} v \bullet \nabla \langle f, g \rangle (a) = \sum_{i=1}^N g_i(a) (\nabla f_i(a) \bullet v) + f_i(a) (\nabla g_i(a) \bullet v) \\ \uparrow \\ \text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^n \\ \hline = \langle g(a), f'(a)(v) \rangle + \langle f(a), g'(a)v \rangle, v \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Hierbei sind  $f'(a), g'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ .

Entsprechend läßt sich eine Produktregel ableiten für den Fall

$$f : X \supset U \longrightarrow Y, g : X \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$$

und das zugehörige Produkt  $x \mapsto g(x) f(x) \in Y$ .

Ganz allgemein:  $f : X \supset U \longrightarrow Y, g : X \supset U \longrightarrow Z$  seien diff'bar in  $a \in U$ ; es bezeichne  $\Omega : Y \times Z \longrightarrow W$  eine Bilinearform in den endlichdim. Raum  $W$ .

Dann gilt:  $\Omega(f, g) : U \longrightarrow W$  ist differenzierbar in  $a$  mit

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega(f, g)'(a)(v) = \\ \Omega(f'(a)v, g(a)) + \Omega(f(a), g'(a)(v)) \end{array}},$$

$v \in X$ .

- 3)  $f : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$  diff'bar in  $a$ ,  
 $F : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  diff'bar in  $a$  ("Vektorfeld")

$$\implies \boxed{\text{div}(fF)(a) = \nabla f(a) \bullet F(a) + f(a) \text{div} F(a)}$$

↑  
Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$

→ Übung: 1) Beweis von ↑

- 2) | berechne die Ableitung von  $\det : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$  an der  
 | Stelle Id:  $\det'(\text{Id})(A) = \text{Spur } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

**Satz 19.1 d:** Sei  $U \subset X$  offen,  $a \in U$ ,  $f : U \rightarrow Y$ .

“Kettenregel”  $\left\{ \begin{array}{l} \text{differenzierbar in } a, V \subset Y \text{ sei offen mit } f(U) \subset V \\ \text{und } g : V \rightarrow Z \text{ differenzierbar in } b = f(a). \text{ Dann ist} \\ g \circ f \text{ differenzierbar in } a \text{ mit} \\ (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a) \\ \left( \text{Hintereinanderausf\u00fchrung der linearen Abbildungen } g'(f(a)), f'(a) \right) \end{array} \right.$

**Beweis:** es gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + |x - a| r(x) \quad \text{auf } U,$$

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y - b) + |y - b| R(y) \quad \text{auf } V$$

mit in  $a$  bzw.  $b$  stetigen Fkten.  $r : U \rightarrow Y$ ,  $R : V \rightarrow Z$ ,  $r(a) = 0, R(b) = 0$ . F\u00fcr  $x \in U$  folgt (da  $f(x) \in V$ ):

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(b) + g'(b)(f(x) - b) + |f(x) - b| \cdot R(f(x)) = \\ &= g(b) + g'(b)(f'(a)(x - a) + |x - a| r(x)) + |f'(a)(x - a) + |x - a| r(x)| \cdot R(f(x)) = \\ &= g(b) + (g'(b) \circ f'(a))(x - a) \\ &+ |x - a| \left\{ g'(b)(r(x)) + \underbrace{|f'(a) \left( \frac{x - a}{|x - a|} \right) + r(x)|}_{=: \rho(x)} R(f(x)) \right\}, \end{aligned}$$

wenn wir zun\u00e4chst  $x = a$  ausschlie\u00dfen.

Sei  $\rho(a) := 0$ . Da  $R \circ f$  stetig ist in  $a$  mit Wert 0 und f\u00fcr  $x \neq a$  die Absch\u00e4tzung

$$|\rho(x)| \leq (|r(x)| + \|f'(a)\|) |R(f(x))|$$

gilt, folgt Stetigkeit von  $\rho$  in  $a$ , und wir haben die Darstellung

$$g(f(x)) = g(f(a)) + (g'(f(a)) \circ f'(a))(x - a) + |x - a| \cdot \underbrace{\{g'(b)(r(x)) + \rho(x)\}}_{\text{stetig in } a \text{ Wert} = 0},$$

woraus nach Bem. 3 im Anschlu\u00df an Def. 18.3 die Beh. folgt. □

Als Korollar bekommen wir die Kettenregel in Matrizenschreibweise:

**KOROLLAR:** Kettenregel für den Eukl. Fall

$$X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^k, Z = \mathbb{R}^\ell$$

$$f : X \supset U \rightarrow Y \text{ diff'bar in } a, \quad V \supset f(U),$$

$$g : Y \supset V \rightarrow Z \text{ diff'bar in } f(a)$$

Dann ist die Jacobi-Matrix von  $D(g \circ f)(a)$  gegeben durch

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g \circ f)^i(a) &= \sum_{\beta=1}^k \frac{\partial g^i}{\partial y_\beta}(f(a)) \frac{\partial f^\beta}{\partial x_\alpha}(a), \\ \alpha &= 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, \ell \end{aligned}}$$

**Beweis:** aus  $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$  bekommt man sofort, dass die Matrix von  $D(g \circ f)(a)$  als Matrizenprodukt der Jacobi-Matrizen von  $Df(a)$  und  $Dg(f(a))$  bestimmt wird, wenn man in den beteiligten Räumen die kanonischen Basen wählt ; obige Gleichung ist dann nichts anderes als die Formel für das Produkt von Matrizen.  $\square$

**Bemerkungen:**

- 1) Aus der Kettenregel folgt für

$$\text{Richtungsableitungen: } \boxed{\partial_v (g \circ f)(a) = Dg(f(a)) (\partial_v f(a))}, \quad * \\ \forall v \in X$$

und dieses Ergebnis gilt auch unter folgenden Voraussetzungen:

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} g \text{ ist in } f(a) \text{ diff'bar,} \\ \partial_w f(a) \text{ existiert} \end{array} \right\} \implies * \text{ gilt für } w},$$

d.h.  $f$  muß nicht notwendig in  $a$  total diff'bar sein.

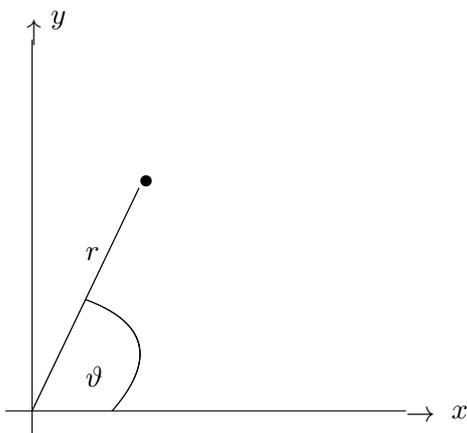
- 2) Im Korollar treten **alle** partiellen Ableitungen von  $g$  auf und von  $f$  nur die, die links gebildet wird.
- 3) Häufig findet man ( $\rightarrow$  Physikkliteratur) die **falsche** Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g \circ f)^i = \sum_{\beta=1}^k \frac{\partial g^i}{\partial y_\beta} \cdot \frac{\partial f^\beta}{\partial x_\alpha},$$

hier wird vergessen, die Abbildungen  $\partial g^i / \partial y_\beta$  "an der Stelle  $f$ " auszuwerten.

**Beispiele:** (Kettenregel) Koordinatentransformationen

- 0) man überlege sich einfache eigene!  
 1) Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$ :



$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(r, \vartheta) = r(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^M$  eine Funktion definiert auf  $U \subset \mathbb{R}^2 \implies f \circ \Phi$  ist definiert auf  $\Phi^{-1}(U)$

“Transformation von  $f$  auf Polarkoordinaten”  
 ( $f$  in Polarkoordinaten)

konkret :  $f(x, y) = x \cdot e^{x^2+y^2} \implies$

$$f(\Phi(r, \vartheta)) = r \cdot \cos \vartheta \cdot e^{r^2}$$

$f$  sei diff'bar auf  $U \implies f \circ \Phi$  kann nach Radius- und Winkelvariable abgeleitet werden, z.B. ( $k = 1, \dots, M$ )

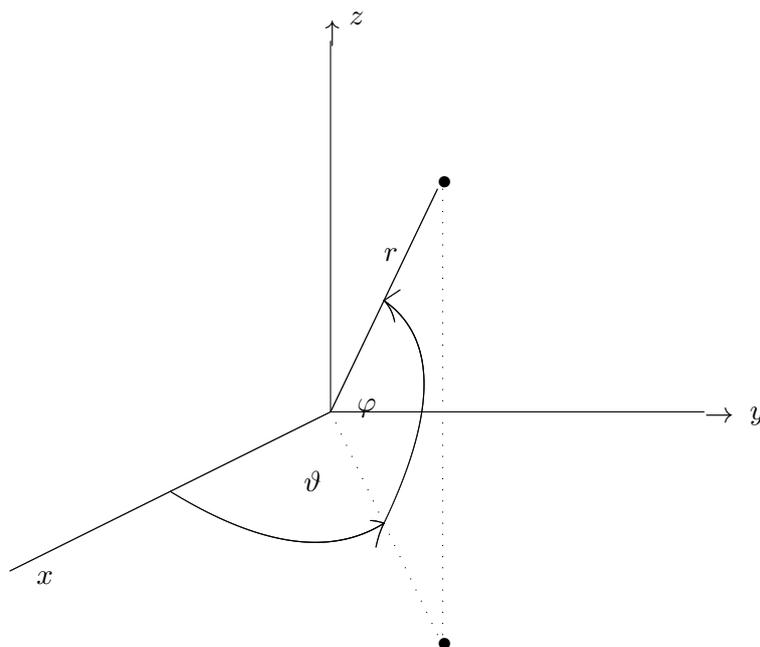
$\frac{\partial}{\partial r} (f \circ \Phi)^k(r, \vartheta) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f^k}{\partial x_i}(r \cdot \cos \vartheta, r \cdot \sin \vartheta) \frac{\partial \Phi^i}{\partial r}(r, \vartheta) = \frac{\partial f^k}{\partial x}(r \cdot \cos \vartheta, r \cdot \sin \vartheta) \cos \vartheta + \frac{\partial f^k}{\partial y}(\dots) \sin \vartheta$ , wenn man die Variablen von  $f$  mit  $x$  und  $y$  statt  $x_1, x_2$  bezeichnet. Entsprechend:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} (f \circ \Phi)^k(r, \vartheta) = -\frac{\partial f^k}{\partial x}(\dots)r \cdot \sin \vartheta + \frac{\partial f^k}{\partial y}(\dots)r \cdot \cos \vartheta$$

beachte: 
$$D\Phi(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$
 Jacobi-Matrix

$$\implies \det D\Phi(r, \vartheta) = r$$

2) Polarkoordinaten im Raum: ( $\rightarrow$  Kegelkoordinaten)



$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) := (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, r \cdot \sin \vartheta), \text{ wobei } r > 0, \vartheta \in (0, 2\pi), \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Jacobi Matrix } D\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

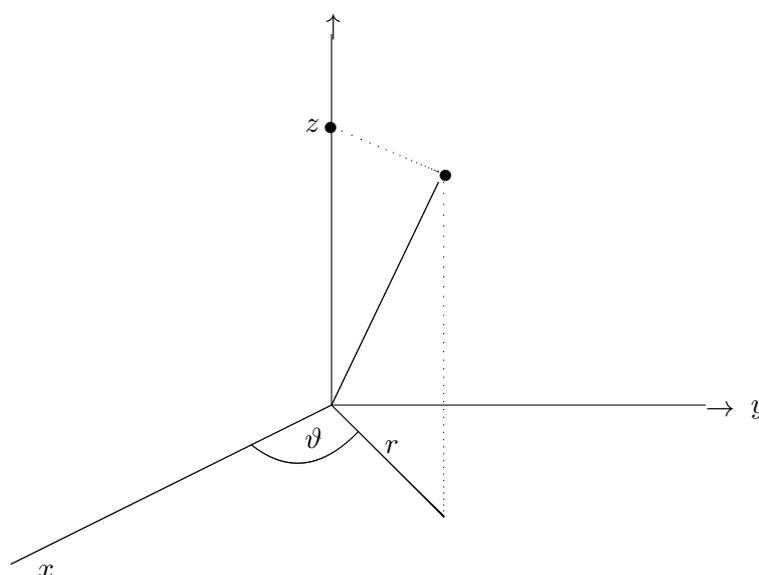
mit

$$\det D\Phi(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \cdot \cos \vartheta$$

Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diff'bar  $\implies$   
 $f \circ \Phi$  ist diff'bar auf  $\Phi^{-1}(U)$  mit z.B.

$$\begin{aligned} \partial(f \circ \Phi) / \partial r &= \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi) \cos \vartheta \cos \varphi \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi) \sin \vartheta \cos \varphi \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi) \sin \varphi \end{aligned}$$

### 3) Zylinderkoordinaten



$$\Phi(r, \vartheta, z) := (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z),$$

$$r > 0, \vartheta \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R} \implies$$

$$D\Phi(r, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \det D\Phi(r, \vartheta, z) = r$$

$f \circ \Phi =$  Transf. von  $f$  auf Zylinderkoordinaten

$\rightarrow$  Übung:  $\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \Phi) = \dots$ , etc.

4) Ableitung der Umkehrfunktion (unter viel zu starken Bedingungen):

$U, V$  offen im Raum  $X$ ,  $f : U \rightarrow V$  bijektiv und diff'bar in  $a \in U$ ,  $f^{-1}$  diff'bar in  $b = f(a) \in V$

$$\implies \boxed{D(f^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}}$$

$\uparrow$   
 Umkehrabb. von  $Df(a) : X \rightarrow X$

**Beweis von 4):** die Kettenregel angewendet auf:

$$\text{Id} = f^{-1} \circ f : U \rightarrow U$$

ergibt  $\text{Id} = D(f^{-1})(f(a)) \circ Df(a)$ , denn  $\text{Id} : U \rightarrow U$  ist natürlich überall diff'bar mit Ableitung  $\text{Id} : X \rightarrow X$ . □

Wir geben nun einige

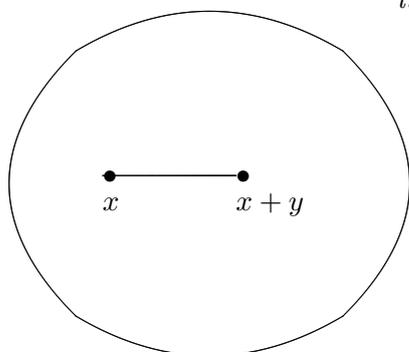
**Einfache Anwendungen:** Schrankensatz, Mittelwertsätze

**Satz 19.2:** (Analogon zum Hauptsatz)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei einmal **stetig partiell diff'bar**. Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x + ty \in U$  für  $0 \leq t \leq 1$ . Dann gilt

$$\boxed{f(x+y) - f(x) = \left( \int_0^1 Df(x+ty) dt \right) y}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{lin. Abb. !}}$



**Bemerkungen:**

1) Integration vektorieller Funktionen  $F : [a, b] \rightarrow X$

( $X = \mathbb{R}$  Vektorraum,  $\dim X < \infty$ ) :

$F$  integrierbar auf  $[a, b]$   $\iff$  die Komponenten  $F^i$  bzgl. irgendeiner Basis  $x_1, \dots, x_L$  von  $X$  sind integrierbar

$$\text{dann: } \int_a^b F(t) dt := \sum_{i=1}^L \left( \int_a^b F^i(t) dt \right) x_i$$

**Spezialfall:**  $F$  ist matrixwertig, also

$$F(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq M}}$$

dann:

$$\int_a^b (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq M}} dt = \left( \int_a^b a_{ij}(t) dt \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq M}}$$

im Satz:

$$\int_0^1 Df(x+ty) dt = \left( \int_0^1 \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x+ty) dt \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq M}},$$

und das Integral rechts existiert wegen der Stetigkeit von  $\frac{\partial f^j}{\partial x_i}$ , also der Stetigkeit von  $t \mapsto \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x+ty)$  auf  $[0, 1]$ .

2) zum Begriff der stetigen Diff'barkeit:

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig diff'bar auf  $U \subset \mathbb{R}^n \iff$

$\frac{\partial f^j}{\partial x_i}$  sind stetig auf  $U$  für alle  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

andererseits:  $f'$  ist Abbildung  $U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  von  $U$  in den Raum der linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  werde mit irgendeiner Norm versehen (z.B. Operatornorm oder Euklidische Norm). Dann kann man zeigen:

**LEMMA:**  $f$  sei diff'bar auf  $U$ . Dann gilt:

Übung!  $\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \left| \frac{\partial f^j}{\partial x_i} \text{ stetig auf } U \text{ für alle } i, j \iff \right. \\ \left. \left| f' \text{ ist stetig auf } U. \right. \right.$

Ist  $f : X \supset U \rightarrow Y$  diff'bar auf  $U$  (offen),  $X, Y$  Räume endl. Dim. so wird man in Anlehnung an das Lemma sagen:

$$\text{Def: } \left\| \begin{array}{l} f \in C^1(U, Y) \quad (\text{stetig diff'bar auf } U) : \iff \\ f' : U \rightarrow L(X, Y) \text{ ist stetig} \end{array} \right.$$

Mit diesem Konzept läßt sich 19.2 wörtlich auf Räume  $X, Y$  statt  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  übertragen.

**Beweis von 19.2:** O.E.  $f$  reell, also  $m = 1$  (sonst komponentenweise); es ist (Hauptsatz!)

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+ty) dt$$

beachte:  $\varphi : t \mapsto x+ty$  ist diff'bar  $\implies$

$$t \mapsto f(\varphi(t)) \text{ ist diff'bar}$$

und (Kettenregel!)

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \varphi^i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ty) y^i \implies$$

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ty) y^i}_{=\nabla f(x+ty) \cdot y} dt.$$

□

**KOROLLAR:** Vor. wie in 19.2; es sei

$$M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x+ty) \right)^2 \right)^{1/2}}_{\text{Eukl. Norm von } Df(x+ty)}$$

Damit gilt:

$$\boxed{|f(x+y) - f(x)| \leq M \cdot |y|} \quad (\text{Schrankensatz})$$

(bzgl. Eukl. Normen)

**Beweis:** zeige als

→ Übung:  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^L$  integrierbar  $\implies$

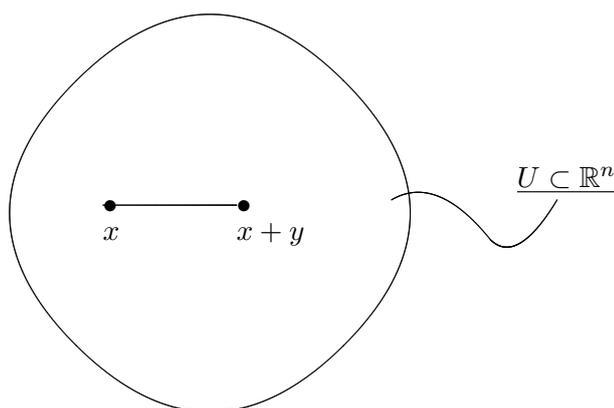
$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt$$

(Hinweis:  $A := \int_a^b F(t) dt$ ;  $|A|^2 = \langle A, A \rangle = \left\langle A, \int_a^b F(t) dt \right\rangle = \int_a^b \langle A, F(t) \rangle dt$   
 $\leq |A| \int_a^b |F(t)| dt$   
 $\uparrow$   
 Cauchy Schwarz

man wende diese Ungleichung an auf die Formel aus 19.2. □

**Bemerkungen:** “Version des M.W.S” für reelle Funktionen mehrerer Variabler

1)



$$\left. \begin{aligned} & f \text{ reellwertig, nur diff'bar auf } U \subset \mathbb{R}^n \text{ (also } f' \text{ nicht notwendig stetig)} \\ \implies & f(x+y) - f(x) = \langle \nabla f(z), y \rangle \\ & \text{für einen Punkt } z \text{ auf der Strecke } \overline{xx+y} \end{aligned} \right\}$$

**Beweis:**  $\varphi(t) := f(x+ty), 0 \leq t \leq 1$

MWS  $\implies \exists \vartheta \in [0, 1]$  mit  $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta)$

man beachte:  $\varphi'(\vartheta) = Df(x+\vartheta y)(y) = \langle \nabla f(z), y \rangle, z := x + \vartheta y$

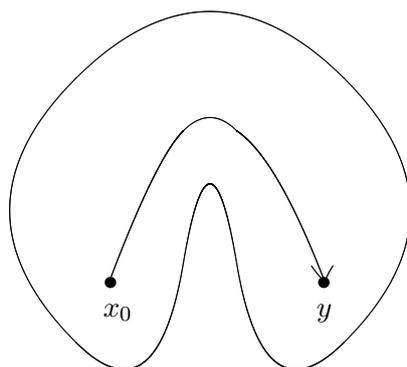
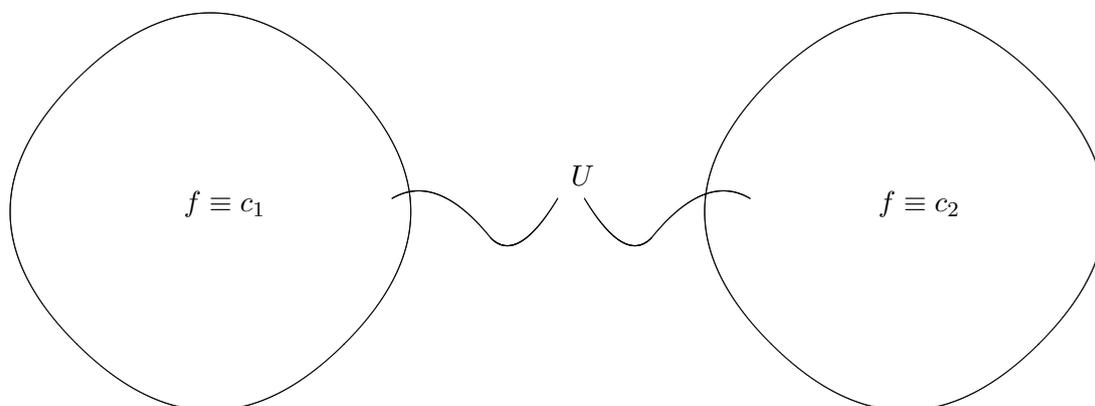
2) sei alles wie in 1), nur  $f$  vektorwertig, also  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\implies f_j(x+y) - f_j(x) = \left\langle \text{grad } f_j(z_j), y \right\rangle \text{ mit i.a. verschiedenen } z_1, \dots, z_m \text{ aus } \overline{xx+y}.$$



**Beweis:** " $\Leftarrow$ " klar, gilt für beliebige offene  $U$

" $\Rightarrow$ " falsch, wenn  $U$  nicht zusammenhängend ist:



$x_0$  beliebiger Punkt aus  $U$ . Für alle  $y \in U$  existiert eine diff'bare Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  von  $x_0$  nach  $y \xrightarrow{3)} f(y) - f(x_0) = \int_0^1 Df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$ , also  $f(y) = f(x_0)$ .  $\square$